ЗАДАЧІ НА ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ ЯК ЗАСІБ ПОСИЛЕННЯ ІНТЕГРАТИВНОЇ ЛІНІЇ У ШКІЛЬНІЙ МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ

PROBLEMS ON GEOMETRIC PROBABILITIES AS A MEANS OF STRENGTHENING THE INTEGRATIVE LINE IN SCHOOL MATHEMATICAL EDUCATION

УДК 375.5.016:51-024.87
DOI https://doi.org/10.32843/2663-6085/2022/48.1.12

Войналович Н.М.,
канд. пед. наук,
доцентка кафедри математики, інформатики, економіки та методик їхнього навчання
Цетральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка

Нічишина В.В.,
доцентка кафедри математики, інформатики, економіки та методик їхнього навчання
Цетральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка

Результати ЗНО з математики 2021 року привернули увагу педагогів до якості математичної освіти. Виникла проблема переглянути традиційні підходи до теоретичної та практичної підготовки старшокласників. Педагогічне спостереження за навчально-пізнавальною діяльністю першокурсників показує, що вчорашні школярі демонструють уривчасті та мозаїчні знання. Учні не можуть пов'язати матеріал, що вивчається, з пройденим раніше. При розв'язуванні задач вони не можуть використовувати факти з різних розділів математики. Одним із напрямків у вирішенні зазначених проблем може стати посилення інтегративної лінії у шкільному курсі математики за рахунок використання математичних задач інтегративного змісту. Це завдання творчого характеру; завдання потужного математичного змісту та складної структури взаємозв'язків між компонентами їх сюжету; завдання з потенціалом створення нових завдань та серії завдань. Розв'язання таких завдань вимагає від учнів глибоких знань і винахідливості. Необхідно не тільки опанувати матеріал певної теми, а й систематизувати та узагальнити знання з різних розділів шкільної математики в межах актуалізації основних змістових напрямків шкільної математики, що, у свою чергу, потребує формування в предметі навчання певного рівня математичної та інформаційної культури. Яскравими прикладами таких задач є задачі на геометричні ймовірності. Ці задачі не вимагають ґрунтовної математичної підготовки і безпосередньо спираються на матеріал шкільної програми. І хоча всі вони розв'язуються за єдиною формулою, та кожна з них має «навчальну родзинку». В межах статті розглянуто задачі про розламування палиці та про голку Бюффона. У процесі розв'язування задач на геометричні ймовірності, оновлення та використання матеріалу здійснюється практично по усіх змістових лініях шкільного курсу математики. Крім того, ці завдання мають потужні можливості для формування базових умінь математичної компетентності. Завдання даної теми є актуальними не лише при вивченні елементів теорії ймовірностей в 11 класі. Вони дозволяють зробити узагальнююче повторення та систематизацію знань учнів за курс старшої школи на якісно новому рівні, сприяють формуванню цілісного уявлення про математику, розвитку дослідницьких, творчих здібностей учнів, підвищують мотивацію до навчання.

Ключові слова: *інтегративна лінія, задачі інтегративного змісту, геометричні ймовірності, цілісне уявлення про математику, математична компетентність.*

The results of the Math ZNO of 2021 attracted the attention of teachers, methodologists and educators as mathematical education. There was a problem to review traditional approaches to the theoretical and practical training of senior pupils. Pedagogical observation of educational and cognitive activity of freshmen shows that yesterday's schoolchildren demonstrate fragmentary and mosaic knowledge; Pupils can't associate the studied material with previously covered one. When solving problems they can't use facts from different sections of mathematics. One of the directions in solving these problems can be increased by an integrative line in the school course of mathematics by using mathematical problems of integrative content. It is tasks of creative character; Tasks with powerful mathematical content and complex structure of interconnections between the components of their plot; Tasks with potential for creating new tasks and series of tasks. The solution of such tasks requires the subjects of education in deep knowledge and ingenuity; There are not only the knowledge of students from a particular topic, but also it requires to systematization and generalization of knowledge from various sections of school mathematics in terms of actualizing the basic content lines of school mathematics, which in turn requires formation in a subject of learning a certain level of mathematical and informational culture. Significant examples of such tasks are geometric probabilities. These tasks do not require a thorough mathematical training and directly rely on the school program. And although they are solved by a single formula and each of them has the "educational raisin". In the process of solving problems for geometric probabilities, updating and use of material almost all content lines of the school course of mathematics is carried out. In addition, these tasks have powerful opportunities for the formation of basic skills of mathematical competence. The tasks of this topic are relevant not only when studying the elements of probability theory in the 11th grade. They allow us to make a generalization repetition and systematization of students' knowledge for a high school course on a qualitatively new level, contribute to the formation of a holistic idea of mathematics, the development of research, creative abilities of students, enhance motivation to study.

Key words: *integrative line, problems of integrative content, geometric probabilities, holistic view of mathematics, mathematical competence.*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими чи практичними завданнями. Невтішні результати ЗНО з математики 2021 року привернули увагу педагогів до якості математичної освіти. Постала проблема переглянути традиційні підходи до теоретичної та практичної підготовки старшокласників.

Бесіди з викладачами математичних дисциплін, спостереження за навчально-пізнавальною діяльністю першокурсників свідчать про низький рівень сформованості навичок порівняння, співставлення, узагальнення, знаходження спільних рис між явищами різної природи. Вчорашні школярі демонструють фрагментарні та мозаїчні знання; вони не вміють пов'язувати матеріал, що вивчається, з пройденим раніше, а під час розв'язування задач використовувати факти з різних розділів математики.

Одним із напрямків у вирішенні зазначених проблем може стати посилення інтегративної лінії у шкільному курсі математики. Такий підхід в організації навчальної діяльності учнів сприятиме цілісності математичних знань та стане запорукою успішного формування не лише предметних компетентностей, але й ключових, зокрема, вміння вчитися та застосовувати набуті знання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ідея педагогічної інтеграції, на думку вітчизняних дослідників, не є новим явищем у педагогіці. Коріння процесу інтеграції лежать в далекому минулому класичної педагогіки. Великий дидактик Ян Амос Коменський підкреслював: «Все, що знаходиться у взаємному зв'язку, повинно викладатися в такому ж зв'язку». Серед сучасних дослідників, які опікуються цією проблемою, можна назвати: Т. Браже, О. Гільзову, М. Масол, О. Савченко, Н. Сердюкову, О. Сухаревську, В. Фоменка.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Методика інтегрованого навчання, як і вся дидактика, в даний час переживає складний період. Змінилися цілі загальної середньої освіти, розробляються нові навчальні плани і нові підходи у вивченні дисциплін. Тож питання інтеграції знань та вмінь залишаються актуальними.

Метою статті є виявлення можливостей задач на геометричні ймовірності щодо реалізації інтегративної лінії у шкільній математичній освіті.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети використовувалися методи аналізу наукової та методичної літератури стосовно проблеми дослідження, здійснювалося узагальнення власного педагогічного досвіду.

Виклад основного матеріалу дослідження. Одним із напрямків реалізації інтегративної лінії у шкільному курсі математики є використання математичних задач інтегративного змісту. Це задачі творчого характеру; задачі з потужним математичним змістом та складною структурою взаємозв'язків між компонентами їх фабули; задачі, що мають потенціал створення на їх базі нових задач та серій задач. Розв'язування таких задач потребує від суб'єктів навчання глибоких знань та винахідливості; тут не лише використовуються знання учнів з певної теми, а й виникає необхідність проведення систематизації та узагальнення здобутих знань з різних розділів шкільної математики в плані актуалізації основних змістовних ліній шкільної математики, що в свою чергу вимагає сформованості у суб'єкта навчання певного рівня математичної та інформаційної культури. Яскравими прикладами таких задач є задачі на геометричні ймовірності.

Геометричні ймовірності. Почнемо із задачі, яка приводить до поняття «геометричні ймовірності». У квадрат, сторона якого відома, навмання кидається точка. Візьмемо в цьому квадраті деяку область *A*. Через *A* позначимо подію: точка попала в область *A*. Спробуємо визначити ймовірність події *A*, користуючись статистичним означенням. Кинемо навмання у квадрат *n* точок і нехай *k* точок попали в область *A*. Інтуїтивно зрозуміло, що відношення *k/n*, тобто частота події *A*, буде близькою до відношення площі області *A* до площі квадрата, і чим більше точок ми кинемо, тим менше буде відрізнятись частота події від цього відношення. Тоді природно за ймовірність події *A* взяти відношення площі *A* до площі квадрата. Якщо ймовірності визначаються подібним чином, то вони називаються *геометричними ймовірностями.*

Звичайно, замість квадрата можна брати довільну область, або довільну поверхню, які мають площу. Позначимо ці об'єкти буквою Ω, а ймовірність події *A* через **P**(*A*). Тоді *геометричні ймовірності* визначатимуться за формулою $\mathbf{P}(A) = \text{площа}(A)/\text{площа}(\Omega)$.

Детально про геометричні ймовірності та історію відповідних задач можна прочитати в книзі [3].

Задача про розламування палиці. Палицю завдовжки l навмання розламали на три частини. Знайти ймовірність того, що з утворених частин можна скласти трикутник.

Задача цікава тим, що для її розв'язання можна розглянути різні математичні моделі.

Розв'язання 1. Покладемо палицю на числову вісь так, щоб її лівий кінець збігся з точкою О (початком координат), а правий співпав з точкою В, абсциса якої дорівнює l. Тоді, навмання розламати палицю на три частини по суті означатиме навмання вибрати дві точки Х (з абсцисою *x*) і У (з абсцисою *y*) на відрізку ОВ. Координати точок Х та У можуть набувати довільних значень з проміжку $(0, l)$. Простір елементарних подій буде складатися з усіх можливих пар вигляду (*x*, *y*), де *x* та *y* задовольняють нерівності $0 < x < l$, $0 < y < l$: $\Omega=\{(x, y): 0<x<l, 0<y<l\}$. А це ніщо інше, як множина точок квадрату. Визначимо довжини отриманих частин відрізка. При цьому можливі два випадки: 1) $x < y$, тоді $|OX|=x$, $|XY|=y-x$, $|YB|=l-y$; 2) $x > y$, тоді $|OX|=y$, $|XY|=x-y$, $|YB|=l-x$.

Для того, щоб з цих відрізків можна було скласти трикутник, необхідно щоб довжина кожного з них була меншою від суми довжин двох інших, тобто:

$$\begin{cases} x+(y-x)>l-y, \\ x+l-y>y-x, \\ (y-x)+l-y>x, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y+(x-y)>l-x, \\ y+l-x>x-y, \\ (x-y)+l-x>y. \end{cases} \qquad (1)$$

Отже, подія A, ймовірність якої ми шукаємо, складається лише з тих точок квадрату, координати яких задовольняють співвідношення (1). Знайдемо множину цих точок.

$$\begin{cases} 2y > l, \\ 2x - 2y + l > 0, \\ 2x < l, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x > l, \\ 2y - 2x + l > 0, \\ 2y < l. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > l/2, \\ y < l/2 + x, \\ x < l/2, \end{cases}$$

$$\text{або } \begin{cases} x > l/2, \\ x < l/2 + y, \\ y < l/2. \end{cases}$$

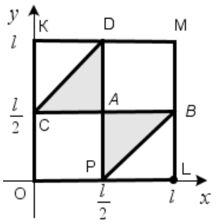

Рис. 1.

Остання сукупність нерівностей визначає заштриховану область на рис. 1. Отже,

$$P(A) = \frac{S_{CAD} + S_{PAB}}{S_{OKML}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2}{l^2} = \frac{1}{4}.$$

Розв'язання 2. Розглянемо іншу математичну модель даного експерименту. Візьмемо рівносторонній трикутник з висотою, що дорівнює довжині палиці $h=l$. Навмання виберемо в ньому точку. Опустимо з неї перпендикуляри на сторони трикутника, які позначимо h_1, h_2, h_3 (рис. 2). Відомо, що $h_1+h_2+h_3=h$ або $h_1+h_2+h_3=l$.

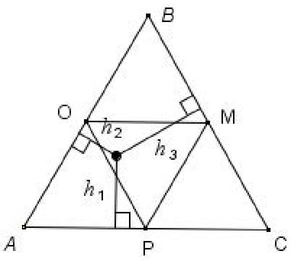

Рис. 2.

У даному випадку, навмання розламати палицю на три частини по суті означає навмання вибрати точку в середині рівностороннього трикутника з висотою $h=l$ і знайти довжини висот, опущених з цієї точки на сторони трикутника. Ці висоти будуть відповідати частинам палиці, що утворилися після розламування.

У цьому випадку простором елементарних подій є внутрішні точки рівностороннього трикутника. Вважатимемо, що точка породжує трикутник, якщо з висот h_1, h_2, h_3, що їй відповідають, можна утворити трикутник. Знайдемо такі частини трикутника.

Згадаємо, що з відрізків, довжини яких h_1, h_2 і h_3, можна побудувати трикутник тоді і лише тоді, коли $h_1 + h_2 > h_3$, і $h_1 + h_3 > h_2$, і $h_2 + h_3 > h_1$.

Розглянемо рівності:

$$h_1 + h_2 = h_3,\ h_1 + h_3 = h_2,\ h_2 + h_3 = h_1. \qquad (2)$$

Знайдемо множину точок розглядуваного трикутника, для яких висоти, що їм відповідають, задовольняють рівності (2).

Оскільки $h_1+h_2+h_3=l$ і $h_1+h_2=h_3$ то $h_3=h_1+h_2=l/2$. Аналогічними міркуваннями маємо: $h_2 = l/2$, $h_1 = l/2$. Отже точки, що задовольняють рівності (2), – це точки середніх ліній заданого трикутника (рис. 2).

Очевидно, ті точки, що розташовані біля кутів трикутника, не породжують трикутників, а ті, що в центрі, – породжують. Проведені міркування дозволяють висунути таку гіпотезу: точки, що породжують трикутники, знаходяться у внутрішній області Δ POM. Доведемо це.

Розглянемо довільну внутрішню точку Δ AOP (рис. 3). Оскільки $h_3 > l/2$ і $h_1+h_2+h_3=l$, то $h_1+h_2 < l/2$. Звідси $h_1+h_2 < h_3$, а значить побудувати трикутник з таких відрізків не можна. Це означає, що точки Δ AOP не породжують трикутників. Аналогічна ситуація і для Δ OBM і Δ PMC.

Розглянемо Δ POM і виберемо в ньому довільну точку (рис. 2). Очевидно $h_1 < l/2$, а отже $h_2+h_3 > l/2$. Маємо $h_2+h_3 > h_1$. Аналогічними міркуваннями можна довести, що h_1+h_3 >Ш і $h_1+h_2 > h_3$. Це означає, що точки Δ POM породжують трикутники.

Оскільки Δ AOM=Δ OBM=Δ PMC=Δ POM, то $P(A) = S_{POM}/S_{ABC} = 1/4$.

Як бачимо, при побудові математичної моделі стохастичного експерименту простір елементарних подій можна вибирати по різному. Але в даному прикладі всі ці математичні моделі еквівалентні між собою.

Задача про голку Бюффона. Площина розграфлена паралельними прямими, які розташовані на відстані 2a одна від одної. На площину навмання кидають голку завдовжки $2l$ ($2l<2a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне одну з прямих.

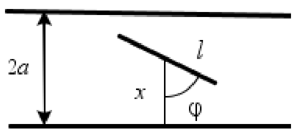

Рис. 3.

Розв'язання. Положення випадково кинутої голки визначається відстанню x від її середини до найближчої прямої і кутом φ, який голка утворює з перпендикуляром, що опущений з середини голки на цю пряму (рис. 3). Зрозуміло, що $0 \le x \le a$, $0 \le \phi \le \pi/2$. Події сприяє випадок, коли $x \le l\cos\phi$. Будуємо відповідну область в системі координат (φ, x) (рис. 4).

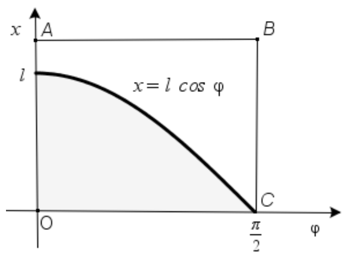

Рис. 4.

Тоді $P = \dfrac{\int_0^{\pi/2} l\cos\phi \, d\phi}{a\cdot\pi/2} = \dfrac{2l}{\pi a}$.

Отриманий результат можна перевірити практично. Так, у середині 19-го століття астроном з Цюріха Вольф кидав голку довжиною 36 мм 5000 разів на площину з лініями, для яких a=45 мм. Перетин спостерігався 2532 рази. Відношення 2532/5000=0.5064, а теоретичне – 72/(45π)=0.5093.

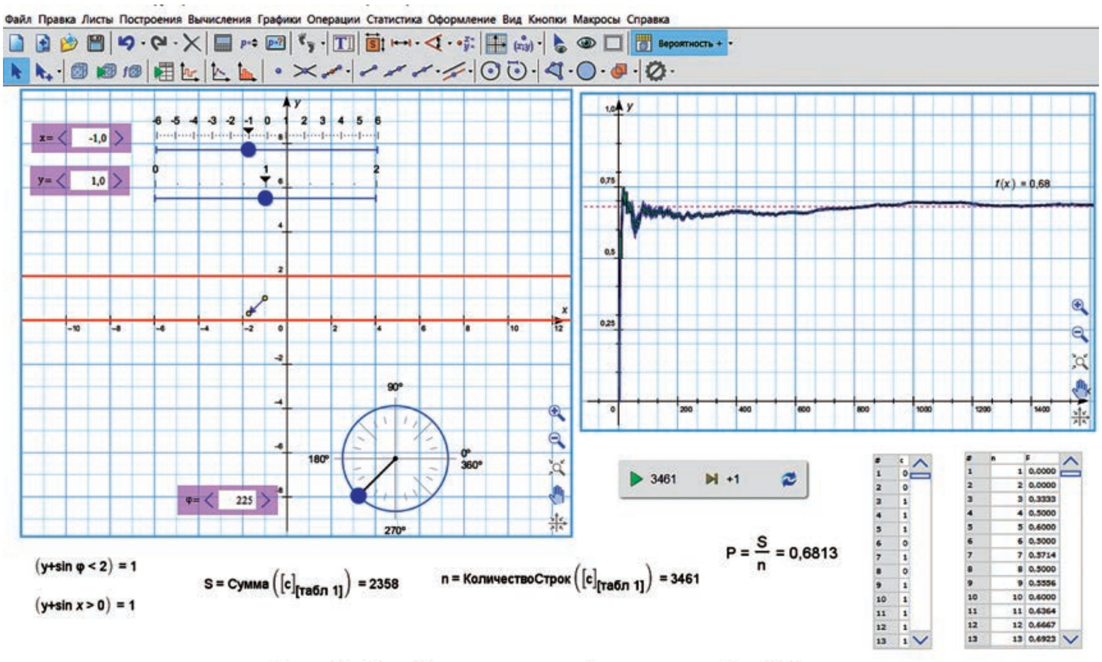

Рис. 5. Розв’язання задачі про голку Бюффона

Змоделюємо тепер розглянутий експеримент засобами інтерактивного середовища «Математичний конструктор». Нехай відстань між прямими дорівнює 2 од., довжина голки – 1 од. Відшукаємо ймовірність того, що голка не перетне жодну пряму.

Зображенням голки буде вектор $\overrightarrow{AB}$, початок і кінець якого мають змінні координати, що залежать від випадкових параметрів $x\in[-6;\ 6]$, $y\in[0;\ 2]$, $\varphi\in[0;\ 360°]$. Тоді A(x, y), B(x+cosφ, y+sinφ). Перевірка того, чи є наслідок досліду сприятливим, визначається за допомогою логічної операції c=((y+sinφ)<2)^(y+sinφ)>0). Для проведення великої кількості дослідів для змінної c застосуємо плеєр випадкових випробувань, а їх результати запишемо до статистичної таблиці. Ймовірність розглядуваної події знайдемо як відношення суми елементів стовпчика, що є наслідками досліду, до кількості рядків у таблиці (рис. 5).

Завдяки експерименту можна знайти наближене значення числа π.

Розглянута задача має узагальнення, де замість голки на площину кидається многокутник.

Запропоновані задачі не вимагають ґрунтовної математичної підготовки і безпосередньо спираються на матеріал шкільної програми. У процесі їх розв’язування здійснюється актуалізація та використання матеріалу майже усіх змістовних ліній шкільного курсу математики.

Крім того, задачі на геометричні ймовірності мають потужні можливості щодо формування таких умінь математичної компетентності: оперувати числовою інформацією, геометричними об’єктами на площині та в просторі; встановлювати відношення між реальними об’єктами навколишньої дійсності; розв’язувати задачі, зокрема практичного змісту; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях.

Задачі даної тематики є доречними не лише під час вивчення елементів теорії ймовірностей в 11 класі. Вони дозволяють здійснити узагальнююче повторення та систематизацію знань учнів за курс середньої школи на якісно новому рівні, сприяють як формуванню цілісного уявлення про математику, так і розвитку дослідницьких, творчих здібностей учнів, посилюють мотивацію до навчання.

Висновки. Інтеграція математичних знань та умінь на сьогодні повинна відігравати важливу роль в організації навчальної діяльності учнів. Інтегративну лінію у шкільному курсі математики варто посилити за допомогою розв’язування задач інтегративного змісту. Доречними прикладами таких задач є задачі на геометричні ймовірності.

Продовження дослідження ми бачимо в розробці системи задач інтегративного змісту з різних розділів математики.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Войналович Н.М. Елементи комбінаторики в системі професійної підготовки вчителя. Евристика та дидактика точних наук. – 1999. – Вип. 10. – С. 44–50.

2. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: навч. посібн.– Кіровоград: РВЦ КДПУ ім.В.Винниченка, 2000. 176 с.

3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. 448с.

4. Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. 192 с.