

ОРГАНІЗАЦІЯ ПРЕВЕНТИВНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ З ПОПЕРЕДЖЕННЯ ПОМИЛОК УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ: «РІВНЯННЯ» ЗГІДНО КОНЦЕПЦІЇ НОВОЇ УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ

ORGANIZATION OF PREVENTIVE ACTIVITIES TO PREVENT STUDENTS' MISTAKES DURING THE STUDY OF THE CONTENT LINE: "EQUALITY" ACCORDING TO THE CONCEPT OF THE NEW UKRAINIAN SCHOOL

Стаття присвячена організації діяльності з попередження алгебраїчних помилок здобувачів загальної середньої освіти сучасної української школи. Серед змістових ліній шкільного курсу алгебри важливою є лінія рівнянь. Безпомилкове розв'язування лінійних, квадратних і дробових раціональних рівнянь, що вивчаються в базовій школі є важливим підґрунтям для формування безпомилкового розв'язування трансцендентних рівнянь в старшій школі. Тому формування належного рівня знань та умінь розв'язування рівнянь має бути предметом постійної уваги вчителя математики.

У статті проаналізовано найбільш поширені математичні помилки школярів яких вони пропускають під час вивчення лінійних, квадратних і дробових раціональних рівнянь, досліджено психолого-педагогічні причини їх виникнення, а також запропоновано експериментально перевірену методику організації превентивної діяльності (під превентивною діяльністю вчителя математики розумімо навчальну діяльність, яка ініціюється потребою: попередити математичні помилки учнів, виправити допущені, з'ясувавши причини їх появи та обрати необхідні методи, організаційні форми та засоби навчання математики) у процесі вивчення різних рівнянь.

Превентивну діяльність слід організувати як процес взаємодії вчителя та учнів, під час якої за допомогою спеціально підібраних методів, прийомів, засобів, по-перше, виявляється походження помилок, по-друге, організовується робота з їх попередження та виправлення. Основним завданням організації превентивної діяльності учнів є розвиток у них здатності самостійно дотримуватись усіх її структурних компонентів.

Результат організованої вчителем превентивної діяльності значною мірою залежить від того, наскільки сам вчитель розуміє особливості розумової діяльності школярів у конкретних умовах навчання, вмє врахувати об'єктивні закономірності засвоєння навчального матеріалу, психолого-педагогічні закономірності сприйняття та запам'ятовування.

Ключові слова: помилки, лінійні рівняння, квадратні рівняння, дробові раціональні рівняння, превентивна діяльність.

The article is devoted to the organization of activities to prevent algebraic errors of general secondary education students of a modern Ukrainian school. Among the content lines of the school algebra course, the line of equations is important. Error-free solving of linear, quadratic and fractional rational equations studied in elementary school is an important foundation for the formation of error-free solving of transcendental equations in high school. Therefore, the formation of the appropriate level of knowledge and the ability to solve equations should be the subject of constant attention of the mathematics teacher.

The article analyzes the most common mathematical errors of schoolchildren, which they make during the study of linear, quadratic and fractional rational equations, investigates the psychological and pedagogical reasons for their occurrence, and also offers an experimentally proven method of organizing preventive activities (preventive activities of a mathematics teacher are understood as educational activities that is initiated by the need: to prevent students' mathematical mistakes, to correct the mistakes made by finding out the reasons for their appearance and to choose the necessary methods, organizational forms and means of teaching mathematics) in the process of studying various equations.

Preventive activity should be organized as a process of interaction between the teacher and students, during which, with the help of specially selected methods, techniques, means, firstly, the origin of errors is revealed, and secondly, work is organized to prevent and correct them. The main task of the organization of preventive activities of students is the development of their ability to independently observe all its structural components.

The result of the preventive activity organized by the teacher largely depends on the extent to which the teacher himself understands the peculiarities of the mental activity of schoolchildren in specific learning conditions, is able to take into account the objective patterns of assimilation of educational material, psychological and pedagogical patterns of perception and memorization.

Key words: errors, linear equations, quadratic equations, fractional rational equations, preventive activity.

УДК 37.013:343.85:[37.016:512]:373.21.

3.091.2.014.3

DOI [https://doi.org/10.32782/2663-](https://doi.org/10.32782/2663-6085/2022/51.1.10)

6085/2022/51.1.10

Благодир Л.А.,

канд. пед. наук,

доцент кафедри вищої математики

та методики навчання математики

Уманського державного педагогічного

університету імені Павла Тичини

Колмакова В.О.,

ст. викл. кафедри інформатики і

інформаційно-комунікаційних технологій

Уманського державного педагогічного

університету імені Павла Тичини

Постановка проблеми у загальному вигляді.

Аналіз підсумкових контрольних робіт школярів, виконання завдань дослідження PISA, завдань державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання останніх років виявляють серйозні недоліки у знаннях учнів з математики. У науково-методичній літературі пропонуються різні шляхи вдосконалення навчального процесу, використовуються нові методики та сучасні технології навчання, однак *робота*

над помилками учнів залишається проблемною зоною в організації навчальної діяльності. Відсутня важлива складова такої роботи: діяльність спрямована на *попередження та недопущення помилок*.

Вважаємо, що профілактика появи помилок відіграє важливішу роль у вивченні предмету, ніж виправлення допущених. Адже сформовані помилкові асоціації виправити набагато важче, ніж своєчасно сформувані правильні.

Досить часто помилки, яких припустилися учасники ЗНО під час обчислень, скорочень або розв'язувань найпростіших рівнянь і нерівностей, призводили до отримання неправильної відповіді в завданнях із тем, які вивчають у 10–11-х класах. Тому ми відзначаємо важливість додержання принципу наступності у діяльності з попередження типових помилок.

Попереджувальна превентивна діяльність учителя математики має ґрунтуватися не лише на знаннях учителя щодо засвоєння учнями навчального матеріалу, а й на розумінні психолого-педагогічних причин появи типових помилок, кожна з яких має своє підґрунтя.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Робота над помилками здобувачів освіти та їх усунення розглядаються на різних рівнях викладачами математики, методистами, психологами, науковцями. В роботах українських науковців Г. П. Бєвза, В. О. Далінгера, О. С. Дубинчук, С. І. Зенько, І. М. Кирилецького, З. І. Слєпкань, Л. П. Черкаської розглядаються різноманітні аспекти методичної роботи над математичними помилками.

Науковці А. К. Артемов, В. М. Брадїс, П. С. Моденов здійснювали педагогічний аналіз помилок. В роботах Н. А. Тарасенкової розглядаються окремі способи оперативного коректування. Г.В. Іщенко досліджувала коректуючі функції навчальних задач.

Психологічний аналіз виникнення математичних помилок здобувачів освіти розглядається в роботах Д. М. Богоявленського, Я. Й. Грудьнова, Н. О. Менчинської. П. О. Шеварьова.

Вивченням учнівських помилок протягом багатьох років займалися німецькі вчені Г. Веймер, А. Лай, В. Літцман.

Виділення невіршених раніше частин загальної проблеми. На шляху успішного навчання помилки **залишаються складною перепорою**. Типові помилки, які повторюються з року в рік залишаються без уваги вчителів. Не організовується робота із запобігання та недопущення таких помилок. Відсутні методичні рекомендації та наукові психолого-педагогічні

роботи. Тому проблема розробки методики здійснення превентивної діяльності потребує оперативного вирішення.

Мета статті – на основі проведеного нами дослідження з проблеми типових помилок учнів, аналізу їх появи та методики попередження під час вивчення алгебри, пропонуємо виявлені типові помилки учнів, психолого-педагогічні обґрунтування причин їх виникнення та методичні прийоми організації діяльності з попередження помилок під час вивчення змістової лінії: «Рівняння».

Виклад основного матеріалу дослідження.
Лінійні рівняння. Під час розв'язування лінійних рівнянь здобувачі освіти досить часто допускають помилки, що пов'язані або з тотожними перетвореннями виразів, або з порушенням рівносильності рівнянь, або з неправильним застосуванням формул загальних розв'язків.

Часто причиною грубих помилок є неправильне знаходження коренів рівнянь $0 \cdot x = 0$, та $0 \cdot x = b$, де $b \neq 0$. Тому під час засвоєння поняття лінійного рівняння у 7 класі, важливо навчити здобувачів освіти розв'язувати рівняння, що мають **безліч коренів, один корінь** та **не мають коренів** взагалі.

З практики відомо, що школярі, які не зрозуміли суті розв'язування таких рівнянь, не розуміють, як за допомогою істинних і хибних рівностей зробити висновок про корені кожного з них. Наприклад, виконавши відповідні перетворення у рівняннях

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 4(3x-12) = 12x-10; & \text{б) } 2(x-10) = 2x-20; \\ 0 = 38 & 0 = 0 \end{array}$$

школярі не завжди можуть правильно записати відповідь до кожного з них. Роз'ясненню незрозумілого сприяє опорний конспект складений учнями за допомогою учителя:

Даний конспект можна взяти за основу на перших етапах вивчення теми. Вже на початку вивчення змістової лінії «Рівняння» важливо, щоб учні зрозуміли зміст понять: рівносильні рівняння, рівносильні перетворення.

Розглянемо ще декілька поширених помилок учнів:

– Під час звільнення цілих раціональних рівнянь від знаменника учні не виконують множення обох частин рівняння на НСЗ.

Таблиця 1

Опорний конспект до теми «Лінійні рівняння»

<p>а) $4(3x-12) = 12x-16;$ $12-48 = 12x - 16;$ $12x - 12x = 32;$ $(12 - 12)x = 32,$ $0x = 32.$ В. Розв'язку немає</p>	<p>б) $4(3x-12) = 12x- 48;$ $12x-48 = 12x- 48;$ $12x-12x = 48- 48;$ $0x = 0.$ (Розв'язком є будь-яке число) В. Безліч розв'язків</p>	<p>в) $4(3x-12) = 8x - 48;$ $4(3x-12) = 8x - 48;$ $4x = 0.$ $x = 0.$ В. Один розв'язок</p>
<p>Пояснення: Не існує такого числа, яке б помножили на нуль і одержали 32.</p>	<p>Пояснення: Під час множення на нуль будь-якого числа, добуток завжди дорівнює нулю.</p>	<p>Пояснення: Добуток двох множників дорівнює нулю, якщо одне з них дорівнює нулю.</p>

Наприклад, при розв'язуванні рівняння $\frac{3x+1}{3} + \frac{2x-3}{2} = 1$, помилково пишуть $2(3x+1) + 3(2x-3) = 1$, замість $2(3x+1) + 3(2x-3) = 6$.

Причиною помилки є формальне засвоєння *рівносильних* перетворень. Також помилка може бути наслідком «хибної» аналогії з розв'язуванням рівнянь, права частина яких *дорівнює нулю* (традиційно: зліва невідомі члени рівняння, справа – відомі). Те, що після перетворення лівої частини права залишається незмінною спонукає деяких учнів до висновку, що права частина рівняння незмінна і тоді, коли вона *відмінна від нуля*.

З метою попередження означених помилок, доцільно рівняння, у яких права частина дорівнює нулю і відмінна від нуля, розглянути одночасно. Відзначити спільне та відмінне, разом з учнями скласти алгоритмічний припис розв'язування таких рівнянь, систему вправ доповнити вправами, що провокують на помилку, згідно законмірності Шеварьова [2].

На перших уроках вивчення лінійних рівнянь важливо сформувати у учнів звичку вказувати множник, на який множаться обидві частини рівняння. Експериментально нами перевірено такий прийом. Якщо учні ним користуються помилки відсутні:

$$\frac{3x+1}{3} + \frac{2x-3}{2} = 1 / \cdot (6); 2(3x+1) + 3(2x-3) = 6$$

$$2(3x+1) + 3(2x-3) = 6.$$

Також має значення звичка учнів завжди *писати* над окремими доданками *додаткові множники* навіть, якщо права частина рівняння дорівнює нулю.

– У випадку, коли коефіцієнт біля невідомого більший за вільний член, учні часто ділять обидві частини рівняння не на коефіцієнт біля невідомого, а на вільний член, наприклад: $30x = 5$; $x = 6$ (замість $1/6$).

Причиною такої помилки є прогалини у знаннях з математики 6 класу:

$$а) \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{10} = \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 10} = 2 \text{ (замість } 1/2).$$

З метою попередження помилки доцільно спрямовувати учнів на те, щоб вони писали 1 на місці скорочених чисел чи змінних, а також завжди перевіряли результат оберненою дією. Крім того, пропонувати вправи на скорочення дробів, виконання множення чи ділення дробів, знаходження невідомих членів пропорції, в яких результат є правильним дробом і дробом вигляду $\frac{1}{n}$. Доцільно також спонукати учнів до осмисленого формулювання останнього етапу в розв'язуванні рівняння (ділення обох частин рівняння на коефіцієнт біля невідомого) та *показувати справа* через ризик

число, на яке ділиться ліва і права частини рівняння: $13x = 7 / (:13); x = 7/13$.

Досить часто учні втрачають знак коефіцієнта: а) $-5x = 25$; $x = 5$.

Доведене до автоматизму «правило ризику» на останньому етапі розв'язування рівняння сприяє безпомилковому знаходженню його розв'язку.

Правильний запис: а) $-5x = 25 / :(-5); x = -5$.

Окрему увагу потрібно звернути на розв'язування рівнянь виду:

$$\frac{t}{3} = 7 \text{ та } \frac{4}{y} = 3.$$

Часто учні затрудняються у розв'язуванні таких рівнянь, зовнішня незвичність лівої частини їх зупиняє. Важливо навчити школярів записувати такі рівняння у вигляді пропорцій. Як свідчить досвід, основну властивість пропорції вони добре знають.

Особливо поширена помилка у випадку, коли невідоме з від'ємним коефіцієнтом знаходиться не на першому місці лівої частини рівняння, наприклад: а) $14 - z = 12, z = 14 - 12, z = 2$; б) $x - y = a + c, y = a + c - x$.

Причиною такої помилки є не стільки неухважність, стільки звичка записувати невідоме з додатним коефіцієнтом, що дорівнює *одному*.

Запобіганню таких помилок сприяє розв'язування рівнянь, у яких коефіцієнт біля невідомого є від'ємним і дорівнює -1. Учні повинні усвідомити, що **-а** означає: -1 помножити на **а**, і це дуже важливо!

– Часто здобувачі освіти після вивчення десятих дробів прагнуть записати корінь рівняння у вигляді десяткового дробу навіть у старших класах. Однак неспроможні це зробити у випадках, якщо звичайний дріб не можна записати у вигляді скінченного десяткового дробу. У даному випадку вчителю потрібно робити акцент на тому, що:

– не завжди доцільно записувати частку у вигляді десяткового дробу, її можна залишити у вигляді звичайного дробу (правильного і нескоротного);

– звичайний дріб можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу тільки в тому випадку, коли знаменник дробу можна подати у вигляді добутку: а) двійок; б) п'ятірок; в) двійок і п'ятірок.

– Характерними є помилки учнів під час перенесення доданків із однієї частини рівняння в іншу. Часто вони не змінюють знаки доданків на протилежні. Наприклад: $4x+11 = 33; 4x = 44; x=10$.

Щоб запобігти таким помилкам, можна оживити рівняння, створити асоціацію. Враховуючи, що дидактична гра є ефективним засобом навчання та розвитку інтересу до предмету, а рівносильні перетворення рівнянь здобувачі освіти виконують у молодшому підлітковому віці, то можна запропонувати створити свої асоціації, зокрема, пов'язані із зміною знаків. Асоціація може, наприклад, бути такою: нехай знак рівності – це річка, між двома

берегами якої живуть члени рівняння. Коли вони перетинають річку, їм доводиться замочити одяг (змінити знак коефіцієнта на протилежний). Асоціацій може бути багато, головне, щоб здобувачі освіти навчилися спочатку під керівництвом учителя, а потім самостійно створювати свої асоціації для запам'ятовування, порівнювати та робити висновки.

Квадратні рівняння. Найбільшу кількість помилок під час розв'язування квадратних рівнянь учні допускають у знаходженні дискримінанта, зокрема, у тому випадку, коли вільний член від'ємний. З метою попередження таких помилок, варто пропонувати учням перед обчисленням дискримінанта обов'язково вписувати коефіцієнти та вільний член, враховуючи загальний вигляд квадратного рівняння: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. В алгоритмі розв'язування рівняння: $x^2 + 2x - 8 = 0$ першою дією має бути визначення коефіцієнтів: $a = 1$, $b = 2$ та вільного члена: $c = 8$. Щоб попередити помилки у знаходженні коренів квадратного рівняння за формулою: $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, вчителю необхідно акцентувати увагу учнів на тому, що $-b$ означає b з протилежним знаком.

З метою осмислення запропонувати такі завдання:

а) чому дорівнює $-b$, якщо $b = 1; 3,1; -23; -4; 45; -11$;

б) чому дорівнює b , якщо $-b = 11; -22; 21; -13; 0$.

Під час вивчення теми «Квадратні рівняння» здобувачі освіти майже не допускають помилок в розв'язуванні неповних квадратних рівнянь. Матеріал нескладний, тому швидко забувається і, як результат, виникають труднощі в розв'язуванні рівнянь, що зводяться до неповних квадратних. Для попередження забуття доцільно актуалізувати зорову пам'ять. Наприклад, під час актуалізації опорних знань скласти разом з учнями карту знань та дозволити користуватися протягом декількох уроків. Здобувачі освіти будуть ґрунтовно знати і пам'ятати всю теорію неповних квадратних рівнянь тоді, коли будуть уміти самостійно наводити приклади таких рівнянь, усно розв'язувати завдання, пропонувати свої контр-приклади. Закріплення теоретичного матеріалу доцільно проводити у вигляді змагань або творчих самостійних робіт. Варто зауважити, що у процесі розв'язування рівнянь виду $(kx + a)(bx + c) = 0$, учні майже не допускають помилок. Але через деякий час вони не помічають істотної відмінності, наприклад між рівняннями $(2x + 1)(5x - 3) = 0$ та $(2x + 1)(5x - 3) = 3$ і, неправильно використовуючи метод аналогії, друге рівняння розв'язують помилково: $2x + 1 = 3$, $x = 1$, або $5 - 3 = 3$, $x = 1\frac{1}{5}$. Якщо

в учнів сформована навичка самоконтролю, вони свою помилку знайдуть відразу. Якщо помилку не виявлено, слід запропонувати знайти декілька

пар чисел, які задовольняють, наприклад рівняння $(x - 4)(x + 8) = 0$, і показати, що існує багато таких пар чисел, добуток яких дорівнює 5: (5; 1), (-5; -1), (0,5; 10) тощо, та звернути увагу на те, що тільки одна пара чисел задовольняє рівняння $(x - 4)(x + 8) = 0$.

З метою запобігання таких помилок ефективним засобом є провокативні завдання, що спонукають бути уважним щодо хибних розв'язків та помилок.

Наприклад. Розв'яжіть рівняння.

$$(x - 12)(x - 1) = 0; (x - 1)(x + 8) = 0;$$

$$(x - 4)(x + 4) = 2; (x - 4)(x + 4) = 2.$$

Для результативного використання аналогії в комплексі з іншими прийомами міркувань, як то порівняння і конкретизація, важливо навчати здобувачів освіти не тільки знаходити спільне в явищах, об'єктах, задачах, але й визначати суттєві, можливо, мало помітні відмінності.

Дробові раціональні рівняння. Варто звернути увагу на те, що часто помилки в учнів з'являються внаслідок невміння розмежувати поняття ціле раціональне рівняння $\frac{2x+1}{3} + \frac{x-3}{2} = 1$ та дробове раціональне рівняння $\frac{5-x}{x-1} - \frac{5+3x}{x^2-1} = 0$

з огляду на зовнішню схожість. Цілі раціональні рівняння розглядалися першими, тому здобувачі освіти звертають увагу на наявність чогось нового, незвичного, в даному випадку – знаменника. А внаслідок хибної аналогії під час вивчення дробових раціональних рівнянь здобувачі освіти розв'язують завдання за хибним алгоритмом, внаслідок чого з'являються сторонні корені.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$\frac{5-x}{x-1} - \frac{5+3x}{x^2-1} = 0.$$

Неправильне розв'язання: множення всіх членів рівняння на $(x^2 - 1)$:

$$(5-x)(x+1) - (5+3x) = 0.$$

Відповідь: 0; 1.

Завдання вчителя: навчити здобувачів освіти розрізняти цілі та дробові раціональні рівняння за зовнішнім виглядом для подальшого вибору способу розв'язування завдання. Саме тому під час вивчення дробово-раціональних рівнянь систему вправ доцільно доповнювати цілими рівняннями із числовими знаменниками. Для запобігання помилок, які з'являються внаслідок неправильної дії віднімання дробів, бажано записувати від'ємник в дужках. Виключення робити лише для здобувачів освіти, які цю дію завжди виконують правильно.

Аналіз результатів складання атестацій з математики виявив, що найбільше помилок при розв'язуванні рівнянь здобувачі освіти допускають внаслідок нетотожних перетворень, що призводять до втрати коренів чи появи сторонніх.

Щоб навчити учнів безпомилково розв'язувати дробові рівняння, варто застосовувати алгоритмічний підхід та включати до системи вправ рівняння під час розв'язування яких з'являються сторонні корені.

Здобувачі освіти мають розуміти, у яких випадках з'являються *сторонні корені* і вміти розділяти їх за певними діями.

Превентивна діяльність учителя була ефективною та результативною, якщо налаштовувати здобувачів освіти постійно перевіряти правильність виконаного завдань; стимулювати активну розумову діяльність, здатність осмислювати кожну дію; виховувати уважність та зосередженість. Із цією метою використовувати різні методи та засоби, які розроблені методистами та психологами: пропонувати завдання, що провокують учнів на помилку, маскувати помилки в розв'язаних завданнях, готувати «пастки» під час розв'язування вправ,

заохочувати балами кожну знайдену помилку однолітків; влаштовувати командні змагання на виконання завдань без помилок та пропонувати учням вправи на уважність.

Висновки. Превентивну діяльність необхідно розглядати як важливу складову освітньої діяльності. Організація превентивної діяльності під час вивчення змістової лінії «Рівняння» в курсі алгебри є своєчасною і важливою.

В подальшому планується дослідити організацію превентивної діяльності вчителя математики під час вивчення змістової лінії: «Нерівності».

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Благодир Л. А. Превентивна діяльність під час навчання школярів математики. *Математика в рідній школі*. 2014. № 2. С. 16–20.
2. Шеварев П. А. Опыт психологического анализа алгебраических ошибок. *Известия АПН РСФСР*, 1946. № 3. С. 135–180.