

ОРГАНІЗАЦІЯ ПРЕВЕНТИВНИХ ЗАХОДІВ ДЛЯ ЗАПОБІГАННЯ ПОМИЛКАМ УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ У НОВИХ УКРАЇНСЬКИХ ШКОЛАХ

ORGANIZING PREVENTIVE MEASURES TO PREVENT STUDENTS FROM MAKING MISTAKES WHEN STUDYING INEQUALITIES IN NEW UKRAINIAN SCHOOLS

Успішне засвоєння змістової лінії нерівності в базовій школі та належне формування вміння розв'язувати лінійні, квадратні та дробово-раціональні нерівності є міцним фундаментом для успішного засвоєння трансцендентних нерівностей та їх безпомилкового розв'язування.

Тому формування вмінь логічно обґрунтувати і доводити нерівності, застосовувати математичні методи в процесі розв'язування нерівностей має бути предметом постійної уваги вчителів математики. У статті проаналізовано типові помилки, яких припускаються учні закладів загальної середньої освіти у процесі вивчення нерівностей, психолого-педагогічні причини виникнення таких помилок, а також методичку організації вчителями математики превентивної роботи з попередження та профілактики найпоширеніших математичних помилок учнів.

Щоб зменшити кількість помилок учнів, учителям необхідно на кожному уроці математики організувати превентивну діяльність, спрямовану на попередження та запобігання типовим помилкам учнів, які повторюються з року в рік, а особливо на зовнішньому незалежному оцінюванні. Ця діяльність має бути процесом взаємодії вчителя та учнів, під час якої за допомогою спеціально підібраних методів, прийомів та засобів по-перше, виявляється походження помилок, а по-друге, організується робота з їх попередження та запобігання. В цій діяльності завдання вчителя – навчити учнів самостійно дотримуватися всіх її структурних компонентів.

У превентивній діяльності вчитель має уміти враховувати об'єктивні закономірності засвоєння навчального матеріалу, психолого-педагогічні закономірності сприймання і запам'ятовування, розуміти структуру розумової діяльності школярів у конкретних умовах навчання.

У дослідженні: «Методична система аналізу та попередження математичних помилок у процесі навчання алгебри в основній школі» автори перевірили ефективність запропонованої методички.

Ключові слова: учні, лінійні нерівності, помилки, квадратні нерівності, дробові

раціональні нерівності, профілактична діяльність.

Successful mastering of the meaningful line of inequality in basic school and proper formation of the ability to solve linear, quadratic and fractional-rational inequalities is a solid foundation for successful mastering of transcendental inequalities and their error-free solution.

Therefore, the formation of the ability to logically substantiate and prove inequalities, to apply mathematical methods in the process of solving inequalities should be the subject of constant attention of mathematics teachers.

The article analyzes typical errors made by students of general secondary education institutions in the process of studying inequalities, the psychological and pedagogical reasons for the occurrence of such errors, as well as the methodology of organizing preventive work by mathematics teachers to prevent and prevent the most common mathematical errors of students.

To reduce the number of student errors, teachers need to organize preventive activities in every mathematics lesson, aimed at prevention and prevention of typical mistakes of students, which are repeated from year to year, and especially in external independent assessment. This activity should be a process of interaction between the teacher and students, during which, with the help of specially selected methods, techniques and means, firstly, the origin of errors is revealed, and secondly, the work on their prevention and prevention is organized. In this activity, the teacher's task is to teach students to independently observe all its structural components.

In preventive activities, the teacher must be able to take into account objective patterns of assimilation of educational material, psychological and pedagogical patterns of perception and memorization, understand the structure of mental activity of schoolchildren in specific learning conditions.

In the study: "Methodological system of analysis and prevention of mathematical errors in the process of teaching algebra in primary school", the authors tested the effectiveness of the proposed methodology.

Key words: pupils, linear inequalities, errors, quadratic inequalities, fractional rational inequalities, preventive activities.

УДК 373.5.016:512.644.8]: [005.334.1-027.252:343.85](045)
DOI <https://doi.org/10.32782/2663-6085/2023/57.1.10>

Благодир Л.А.,
канд. пед. наук,
доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Головна мета нових українських шкіл-перейти від шкіл, які дають лише знання, до шкіл, які формують компетентності необхідні для життя в 21 столітті.

Математична компетентність – одна з десяти ключових компетентностей випускників шкіл, яка включає розвиток культури логічного та алгоритмічного мислення та вміння застосовувати

математичні методи для розв'язання прикладних задач у різних галузях.

Курс математики базової школи логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів та є важливим підґрунтям до сприйняття навчального матеріалу в профільних класах. Проте слід

відмітити, що накопичення знань учнів супроводжується накопиченням помилок. Наразі ми маємо на увазі типові математичні помилки, які під час засвоєння нового навчального матеріалу з'являються у перевірочних роботах поточного контролю, а потім досить часто заважають одержати високу оцінку під час підсумкового оцінювання та виконання завдань зовнішнього незалежного оцінювання. Тому для вчителя математики одним із важливих завдань є організація діяльності в боротьбі з типовими помилками, які повторюються з року в рік, і в більшості учнів. З практики навчання математики відомо, що вчителі працюють над помилками учнів, застосовують для цього новітні методи і засоби, проте найпоширеніші помилки не зникають, а з'являються знову і знову. На нашу думку, виправлення помилки після того як в учня вже сформувалась помилкова асоціація є мало ефективним. Вважаємо, що постійну увагу вчителі мають приділяти не стільки виправленню помилок, хоча це теж важливо, а попередженню, запобіганню та недопущенню помилок учнів, працювати на кожному уроці над формуванням правильних асоціацій і не допускати формування неправильних.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Робота з математичними помилками учнів постійно знаходяться в полі зору психологів, методистів, педагогів, учених-математиків. Психологічний аналіз математичних помилок учнів розглядали Я. Й. Грудьонов, Н. О. Менчинська П. О. Шеварьов, різні аспекти методичної роботи над математичними помилками учнів розглядаються в роботах Г. П. Бевза, В. О. Далінгера, О. С. Дубинчук, С. І. Зенько, З. І. Слєпкань. Вивченням учнівських помилок займалися зарубіжні вчені R. Borasi (1996), R. Garuti, P. Voero G. Chiappini (1999), A. Heinze (2005), W. Joung, B. Hesketh, A. Neal (2006).

Постановка завдання. Слід відмітити, що в роботах науковців ми знаходимо зміст типових математичних помилок, психолого-педагогічний аналіз причин виникнення та поради для виправлення. В мережі Інтернет пропонуються відео де розглядаються деякі типові помилки та засоби їх виправлення. Але відповіді на питання як організувати превентивну діяльність з профілактики та попередження помилок ми не знайшли.

Мета статті. Враховуючи власний досвід педагога-практика, результати проведеного нами дослідження з проблеми типових математичних помилок учнів, аналізу їх появи та методики упередження та профілактики під час вивчення алгебри, пропонуємо виявлені найбільш поширені помилки учнів, та методичні прийоми організації превентивної діяльності з профілактики таких помилок під час вивчення змістової лінії нерівності.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нерівності – один з найскладніших аспектів

шкільного курсу математики, оскільки саме при вивченні та розв'язуванні нерівностей школярі допускають багато помилок.

Прикро спостерігати, що учні досить часто не розуміють суті нерівності, тому вже на початку вивчення числових нерівностей і їх систем учні повинні чітко *засвоїти правило порівняння двох чисел*: якщо $a - b > 0$, то $a > b$; якщо $a - b < 0$, то $a < b$; якщо $a - b = 0$, то $a = b$.

Для кращого розуміння правила важливо, щоб учні вміли ілюструвати кожний з випадків власними прикладами.

Лінійні нерівності. Загальний вигляд та алгоритм розв'язування лінійних рівнянь та лінійних нерівностей має багато спільного. Тому внаслідок *хибної аналогії* в учнів нерідко виникає помилкове уявлення про повну аналогію алгоритмів, а отже, з'являються помилки під час множення (ділення) обох частин нерівності на *від'ємне* число. Причину ми вбачаємо в тому, що: розв'язування лінійних рівнянь вивчається в 7 класі, де матеріал розглядається вперше, і, як все нове, запам'ятовується краще, а лінійні нерівності вивчаються у 9 класі, і часто вчителі акцентують увагу учнів на тому, що лінійні нерівності розв'язуються *аналогічно* до лінійних рівнянь. Таким чином формується помилкова асоціація. Учні вміють розв'язувати лінійні рівняння, а, отже, над розв'язуванням лінійних нерівностей особливо не замислюються.

Щоб запобігти появі помилок у наступних класах, варто з самого початку вивчення нерівностей детально розглянути з учнями *спільне* та *суттєве відмінне* між рівняннями і нерівностями. Для цього властивості рівнянь і нерівностей доцільно розглянути одночасно (зокрема множення і ділення обох частин на додатне та від'ємне число), поставивши на перше місце властивість, в якій суттєве різне. Обговорити відповіді, запропонувати скласти приклади самостійно тощо.

1. Якщо обидві частини $\frac{\text{рівняння}}{\text{нерівності}}$ помножити або поділити на одне і те ж від'ємне число, то *знак*.

$\frac{\text{рівності}}{\text{нерівності}}$ зберігається
 $\frac{\text{рівності}}{\text{нерівності}}$ змінюється на протилежний

$$\begin{aligned} 7 &= 7, & 8 &< 12, \\ 7 \cdot (-2) &= 7 \cdot (-2), & 8 \cdot (-2) &> 12 \cdot (-2), \\ -14 &= -14. & -16 &> -24. \end{aligned}$$

2. Якщо обидві частини $\frac{\text{рівняння}}{\text{нерівності}}$ помножити або поділити на одне і те ж додатне число, то *знак* $\frac{\text{рівності}}{\text{нерівності}}$ зберігається.

$$\begin{aligned} 11 &= 11, & 15 &< 26, \\ 11 \cdot 2 &= 11 \cdot 2, & 15 \cdot 2 &< 26 \cdot 2, \\ 22 &= 22. & 30 &< 52. \end{aligned}$$

Слід також відмітити, що в учнів вже на початку вивчення нерівностей з'являються психологічні труднощі в осмисленні результатів розв'язування цих нерівностей. Як відомо, зміст знайденого розв'язку рівняння і нерівності зовсім різний, тому завдання вчителя донести до учнів, що множина розв'язків рівняння в більшості випадків *конкретна і скінченна*, тоді як множина розв'язків нерівності в більшості випадків *нескінченна*. Подолати психологічні труднощі в осмисленні результату розв'язування нерівностей допомагає геометричне тлумачення множини розв'язків нерівності та планомірне застосування системи вправ. У подальшому має зміст розв'язування вправ на знаходження розв'язків рівнянь і нерівностей одночасно.

Важливо також відпрацювати звичку звертати увагу на дію, що виконується: *якщо дільник від'ємний, після нього ставити знак оклику, що означає: «увага!»*.

$$x - 5 > 3x + 9,$$

$$-2x > 14 / : (-2) \quad \triangleleft \text{ (зверніть увагу, будьте уважні!)} \\ x < -7.$$

Запам'ятати про відмінності у розв'язках рівнянь і нерівностей допоможе схема, яку бажано залишити на дошці до кінця уроку:

розв'язок рівняння — корені
розв'язок нерівності — проміжок

З практики навчання учнів відомо, що вони часто неправильно ставлять дужки, записуючи розв'язок нерівності, забувають «виколовати» точки на числовій прямій. Запобігання таких помилок сприяє використанню опорної схеми:

$$\begin{array}{cccc} < & > & \leq & \geq \\ (&) & [&] \\ \circ & \circ & \bullet & \bullet \end{array}$$

Таку схему учні можуть скласти самі або за допомогою вчителя, зобразити її на полях і користуватися протягом вивчення всієї теми.

Слід звернути увагу, на те, що учні, під час розв'язування нерівностей іноді приходять до дії, яку не можна виконати, тому одержують неправильну відповідь.

Наприклад. Розв'язати нерівність:

$$12x - 6 < 12x + 18, \quad 12x - 12x < 18 + 6, \quad 0x < 24, \quad x < \frac{24}{0}.$$

На нуль ділити не можна. Неправильна відповідь: *немає розв'язку*.

З метою запобігання таких помилок учні мають навчитися *усно* розв'язувати нерівності виду: $0x > 5$; $0x < 0$; $0x \leq -5$; $0x \geq 0$; $0x \geq -3$ та здійснювати аналіз нерівності, записаної у вигляді $ax < b$ ($ax > b$).

Помилку вище, не буде допущено, якщо учні зупиняться на нерівності $0x < 24$ та аргументують її розв'язок.

Активізує мислення учнів, розв'язування наступних нерівностей:

$$1) x > x - 4; \quad 2) x + 2 > x; \quad 3) x \leq x; \quad 4) x + 4 - x < 0; \quad 5) 0x \geq 1.$$

Попередженню помилок сприяють завдання на знаходження помилки.

Наприклад: Знайдіть помилку та вкажіть причину її появи:

$$-2x - 9 < 5; \quad -2x < 14; \quad x < 14 : (-2); \quad x < -7.$$

Значне місце в роботі з попередження та профілактики помилок займають завдання на розкриття софізмів.

Квадратні нерівності. Як відомо, алгоритми розв'язування *квадратних рівнянь* і *квадратних нерівностей* схожі, тому в наслідок хибної аналогії учні і допускають більшість помилок. Приклади таких помилок пропонуємо у наступній таблиці.

Враховуючи, що помилка $x^2 < 16$, $x < \pm 4$ є поширеною, вчителю важливо *звернути особливу увагу учнів на цю помилку*, розглянути з учнями правильне розв'язування нерівності, акцентувати увагу на тому, що це *квадратна нерівність*, тому спосіб її розв'язування буде таким, як спосіб розв'язування всіх квадратних нерівностей, згідно встановленого правила-орієнтира. Також у ході вивчення теми учні повинні навчитися розв'язувати нерівності виду: $ax^2 \leq b$; $ax^2 > bx$ та аналізувати одержані розв'язки.

Щоб сприяти попередженню помилок внаслідок хибної аналогії, важливо акцентувати увагу учнів на *спільному* та *відмінному* у квадратних рівняннях $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0, b, c \in R$ та квадратних нерівностях $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0, b, c \in R$. Залучати їх до складання синквейнів; написання рефератів та повідомлень, наприклад, таких: «Роль квадратних рівнянь у розв'язуванні нерівностей», «Чи залежить множина розв'язків квадратної нерівності від розв'язків відповідного квадратного рівняння?»; до створення проєктів тощо.

Слід також звернути увагу на те, що учні досить часто неправильно розв'язують квадратні нерівності, коли дискримінант відповідного квадратного рівняння від'ємний. Тому вбачаємо за необхідне вчасне повторення властивостей квадратичної функції, зокрема, вигляд та розміщення параболи в залежності від знаку першого коефіцієнта a та дискримінанта D .

Розв'язування нерівностей за допомогою графіка відповідної квадратичної функції знову приводить до хибної аналогії. Учні намагаються будувати повний графік, витрачаючи на це зайвий час, допускають помилки. Тому вже на початку вивчення теми варто сформулювати правильну асоціацію: *в розв'язуванні квадратних нерівностей графік відповідної квадратичної функції зображується схематично*, і доцільно визначати тільки

Помилки під час розв'язування нерівностей

Розв'язання рівнянь	Помилкове розв'язання нерівностей
1. $x^2=16, x_1 = 4, x_2 = -4.$	1. $x^2 < 16, x < \pm 4.$
2. $x^2 - 25 = 0;$ $(x-5)(x+5) = 0;$ $x-5 = 0$ або $x+5 = 0;$ $x = 5$ або $x = -5.$	2. $x^2 - 25 < 0, (x-5)(x+5) < 0$ $\begin{cases} x-5 < 0, \\ x+5 < 0; \end{cases} \begin{cases} x < 5, \\ x < -5; \end{cases} x < -5$
3. $2x^2 + 3x + 1 = 0,$ $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$ $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -1.$	3. $2x^2 + 3x + 1 < 0,$ $2x^2 + 3x + 1 = 0, D = 1$ $x_1 < -\frac{1}{2}, x_2 < -1.$
4. $x^2 - 3x + 7 = 0$ $D = 9 - 28 = -19 < 0$ Оскільки $D < 0$, то рівняння не має коренів.	4. $x^2 - 3x + 7 > 0,$ $D = 9 - 28 = -19 < 0$ Оскільки $D < 0$, нерівність розв'язків не має.

напрямок «віток» параболи та знаходити нулі функції (якщо вони є).

Для кращого запам'ятовування познайомити учнів з розв'язуванням квадратних нерівностей, враховуючи закономірності мислення, можна таким чином:

1. Показати зразок розв'язування квадратної нерівності.

2. Попросити учнів ознайомитись із запропонованим зразком та самостійно скласти алгоритм розв'язування схожих нерівностей; порівняти власний алгоритм та алгоритм вчителя.

Якщо в запропонованому вчителем алгоритмі допускається неточність і учням пропонується знайти її, то настає мить активізації мисленнєвої діяльності учнів, що буде сприяти кращому засвоєнню правильного алгоритму. Спрацьовує дидактичне правило: спочатку вчитель ставить конкретне завдання, яке учні повинні виконати у процесі ознайомлення з матеріалом і тільки після осмислення ними поставленого завдання їм пропонується читати відповідний параграф підручника, слухати пояснення учителя.

Наступним кроком є складання учнями під керівництвом учителя узагальненого алгоритму.

Обов'язковим є внесення створеного алгоритму розв'язування квадратних нерівностей до особистого довідника учня.

Розглянемо деякі логічні помилки, яких припускаються учні у процесі розв'язування нерівностей.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність: $(3x + 9)^2 \geq 0$.

Неправильне розв'язання:

$$(3x + 9)^2 \geq 0; 3x + 9 \geq 0; 3x \geq -9; x \geq -3.$$

Помилка у міркуванні, не враховано, що $(3x + 9)^2 \geq 0$ виконується для всіх значень змінної x .
Правильна відповідь: $(-\infty; \infty)$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність: $(x + 4)^2 \leq 0$.

Неправильне розв'язання: Нерівність $(x + 4)^2 \leq 0$ розв'язків немає.

Причиною помилки є не врахування того, що знак нерівності не строгий. Правильне розв'язання:

Нерівність $(x + 4)^2 \leq 0$ виконується при $x = -4$. Відповідь: $x = -4$.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність: $(x - 3)^2 > 0$.

Неправильне розв'язання: Нерівність: $(x - 3)^2 > 0$ виконується для всіх значень змінної x .
Відповідь: $(-\infty; \infty)$.

Причиною помилки є не сформоване уміння здійснювати аналіз нерівності, упущено момент, що при значенні $x=3$, ліва частина нерівності дорівнює нулю.

Правильне розв'язання: Якщо $x = 3$, то $(x - 3)^2 = 0$, отже $x \neq 3$.

Відповідь: $(-\infty; 3) \cup (3; \infty)$.

Дробові раціональні нерівності. Як свідчить аналіз помилок, в розв'язуванні учнями дробових раціональних нерівностей, вони з'являються у таких випадках:

1. Під час множення обох частин нерівності на вираз зі змінною, без урахування допустимих значень змінної.

Приклад. Розв'язати нерівність $\frac{2x+1}{x-2} > 1$.

Неправильне розв'язання:

$$2x + 1 > x - 2; x > -3; x \in (-3; \infty). \text{ Відповідь: } (-3; \infty).$$

Правильна відповідь: $(-3; 2) \cup (2; \infty)$.

2. Під час зведення вихідної нерівності до системи нерівностей або сукупності систем нерівностей.

Приклад. Розв'язати нерівність: $\frac{2x+4}{x} > 0$.

Неправильне розв'язання:

$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > -2 \\ x > 0 \end{cases}; x > 0.$$

Відповідь: $(0; \infty)$.

Причина помилки в тому, що втрачено ще один випадок, коли дріб буде додатним:

$$\begin{cases} 2x + 4 < 0 \\ x < 0 \end{cases}; \begin{cases} x < -2 \\ x < 0 \end{cases}; x < -2,$$

отже маємо $\begin{cases} x > 0, \\ x < -2. \end{cases}$

Правильна відповідь: $(-\infty; -2) \cup (0; \infty)$.

3. Логічні помилки.

Приклад. Розв'язати нерівність $\frac{x^2 + 81}{4 - x^2} > 0$.

Неправильне розв'язання:

$$x^2 + 81 > 0 \text{ при } x \neq \pm 2.$$

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

Причиною появи помилки є не врахування того, що у додатного дроби, чисельник якого додатний при будь-яких значеннях змінної, знаменник має бути тільки додатним.

Отже, $4 - x^2 > 0$,

тому правильна відповідь: $(-2; 2)$.

Здійснивши аналіз підручників з алгебри для 9 класу та чинну програму з математики, ми не виявили окремої теми «Розв'язування дробово-раціональних нерівностей». Тому вважаємо, що значна кількість помилок, які допускають учні, пов'язана з відсутністю в підручниках чітких орієнтирів стосовно тих дій, які повинні бути виконані для правильного розв'язування таких нерівностей.

Нині за чинною програмою, тільки в класах з поглибленим вивченням математики учні знайомляться з методом інтервалів. Вважаємо, що з метою попередження помилок під час вивчення квадратних і дробових раціональних нерівностей учні мають знати різні способи їх розв'язування. Таким чином, розв'язуючи нерівність одним способом вони зможуть перевірити правильність розв'язання іншим.

Одним із ефективних засобів по упередженню помилок в розв'язуванні нерівностей, ми вважаємо прийом провокації на помилку. Адже кожна помилка свідчить про недостатній рівень сформованості знань, а допущена і відразу виправлена запам'ятається. Отже, наступного разу не повториться.

Щоб менше було помилок, вчителю необхідно навчити учнів усвідомлено приступати до розв'язування нерівностей, здійснювати аналіз умови, визначати вид нерівності, вибирати раціональний спосіб та метод її розв'язування, і обов'язково вміти здійснювати перевірку одержаного результату.

Висновки. Діяльність з попередження та запобігання помилок є важливою складовою освітньої діяльності. Враховуючи той факт, що помилки з'являються під час вивчення кожної теми, завдання вчителя разом з учнями здійснювати превентивні дії, спрямовані на недопущення цих помилок.

Організація превентивної діяльності під час вивчення змістової лінії нерівності в курсі алгебри є своєчасною і важливою. Подальших досліджень потребує організація превентивної діяльності вчителя математики під час вивчення змістової лінії: функції та графіки функцій, адже зв'язок між цими змістовими лініями є безпосереднім і впливовим.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Благодир Л. А. Попередження помилок учнів з математики як необхідна умова успішного навчання. The 15th International scientific and practical conference «Innovations and prospects of world science» (October 12-14, 2022) Perfect Publishing, Vancouver, Canada. 2022. P.138-146.
2. Raffaella Borasi. Exploring Mathematics through the Analysis of Errors *For the Learning of Mathematics* Vol. 7, No. 3 (Nov., 1987), pp. 2-8 (7 pages). Published By: FLM Publishing Association. <https://www.jstor.org/stable/40247900>
3. Швець В. О. Благодир Л. А. Превентивна діяльність вчителя математики: зміст і структура. *Дидактика математики: проблеми и исследования: межд. сб. науч. работ.* Донецк: ТЕАН, 2010. Вып. 36. С. 13–18.