РОЛЬ І МІСЦЕ ТЕМИ «ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ» У ФОРМУВАННІ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ СТАРШИХ КЛАСІВ

THE ROLE AND PLACE OF THE TOPIC “EXPONENT EQUATIONS” IN THE FORMATION OF THE MATHEMATICAL COMPETENCE OF STUDENTS OF SENIOR CLASSES

УДК 378.147
DOI https://doi.org/10.32782/2663-6085/2023/62.2.2

Мулеса О.Ю.,
докт. тех. наук,
професор кафедри програмного забезпечення систем
Державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет»

Імре Ю.Ю.,
ст. викладач кафедри фізико-математичних дисциплін
Державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет»

Кенгерц С.С.,
ст. викладач кафедри фізико-математичних дисциплін
Державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет»

Неце А.Е.,
асистент кафедри фізико-математичних дисциплін
Державного вищого навчального закладу «Ужгородський національний університет»

Стаття присвячена дослідженню впливу теми «Показникові рівняння» на формування математичних компетентностей учнів старших класів. В ході дослідження було виокремлено місце даної теми в навчальних програмах математики різних рівнів. Також, показано зв’язок теми з темами, які входять в навчальні програми середньої школи.

Для аналізу процесу формування математичних компетеностей вході розв’язування показникових рівнянь було розглянуто приклади різних рівнів складності. Всі приклади вибрані з підручників з математики та належать до різних рівнів складності. Для найпростіших прикладів продемонстровано спосіб застосування теоретичного матеріалу для обгрунтування міркувань та основних кроків. Завдання цього типу формують в учнів процедурну компетентість. Ряд прикладів підібрані таким чином, щоб їх розв’язування потребувало застосування алгоритмів розв’язування рівнянь інших видів. Зокрема, тригонометричних та ірраціональних рівнянь. Навички переходу між темами в ході вирішення завдання якісно впливають на формування процедурної та методологічної компетеностей.

Продемонстровані способи розв’язування показникових рівнянь з параметром. Показано, що розв’язування завдань такого типу потребує від учнів володіння не тільки алгоритмами розв’язування рівнянь окремих типів, а й наявності цілісної системи базового математичного апарату. Сюди належать знання про властивості основних функцій, розуміння поняття параметру, вміння нестандартно застосовувати теореми та правила. Показано, що досвід розв’язування показникових рівнянь з параметром забезпечує формування логічної та дослідницької компетеностей.

Таким чином, в ході дослідження продемонстровано важливу роль теми «Показникові рівняння» в шкільному курсі математики та її значного впливу на формування математичних компетеностей в учнів старших класів.

Ключові слова: *математична компетентність, методика навчання, показникові рівняння, рівняння з параметрами, методи розв’язування рівнянь, навчальна програма з математики.*

The article is devoted to the study of the influence of the topic "Exponent equations" on the formation of mathematical competences of high school students. In the course of the study, the place of this topic in mathematics curricula of various levels was highlighted. Also, the connection of the topic with topics that are included in secondary school curricula is shown.

To analyze the process of formation of mathematical competences in the solution of indicator equations, examples of different levels of complexity were considered. All examples are selected from mathematics textbooks and belong to different levels of difficulty. For the simplest examples, the method of applying the theoretical material to substantiate the reasoning and basic steps is demonstrated. Tasks of this type form students' procedural competence. A number of examples are selected in such a way that their solution requires the use of algorithms for solving equations of other types. In particular, trigonometric and irrational equations. The skills of transition between topics in the course of solving a task have a qualitative effect on the formation of procedural and methodological competences.

Methods of solving exponential equations with a parameter are demonstrated. It is shown that solving tasks of this type requires students not only to master algorithms for solving equations of individual types, but also to have a complete system of basic mathematical apparatus. This includes knowledge about the properties of basic functions, understanding the concept of a parameter, and the ability to apply theorems and rules in a non-standard way. It is shown that the experience of solving exponential equations with a parameter ensures the formation of logical and research competences.

Thus, in the course of the study, the important role of the topic "Exponent equations" in the school mathematics course and its significant influence on the formation of mathematical competences in high school students was demonstrated.

Key words: *mathematical competence, teaching method, exponential equations, equations with parameters, methods of solving equations, curriculum in mathematics.*

Постановка проблеми. Показникова функція широко використовується при побудові моделей для фізичних, хімічних та інших процесів і явищ. Розв’язання багатьох технічних задач зводиться до знаходження розв’язку показникового рівняння або системи рівнянь В шкільному курсі математики показникові рівняння та нерівності належать до програм 11 класу [1–3]. Саме на показниковій функції акцентують увагу розробники навчальних програм. В залежності від рівня вивчення математики в старшій школі, змінюється кількість годин, виділених на дану тему, а також глибина та обсяг досліджуваного матеріалу: від базових показникових рівнянь до показникових рівнянь з параметрами. Проте, в кожному з випадків, при вивченні даної теми, відбувається систематизація та узагальнення знань, опанованих в попередніх роках та отримують подальший розвиток процедурна, логічна, дослідницька та методологічна компетентності [4].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існує ряд посібників для вчителів та учнів, присвячених проблемі формуванню математичних компетентностей в учнів [5–7]. Так, в [7] відзначено, що у процесі пізнання математичних об’єктів формуються розумові й практичні уміння. Прості уміння трансформуються у навички діяльності. Відмічено, що важливим є розроблення методик оволодіння учнями складовими математичної компетенції [7]. У [5] досліджено, що зміст математичної компетентності складають процедурна, логічна, технологічна, дослідницька та методологічна компетентності. [6] присвячена обгрунтуванню впливу компетентнісно зорієнтованих задач на формування математичної компетентності.

Наступну групу досліджень утворюють роботи, присвячені способам розв’язання показникових рівнянь [8–10]. Всі вони містять теоретичні викладки за досліджуваною тематикою, а також розв’язки окремих рівнянь. Публікації такого роду є актуальними та важливими як для вчителів математики, так і для учнів. Проте, зважаючи на велику кількість способів розв’язування показникових рівнянь, особливо підвищеного рівня складності, актуальним є проведення подальших досліджень з методики їх навчання.

Формулювання цілей статті. Проілюструвати методику розв’язання показникових рівнянь, що ґрунтується на встановленні логічних та наслідкових зв’язків між різними, раніше вивченими, темами для розвитку математичної компетентності учнів старшої школи.

Виклад основного матеріалу. Відповідно до навчальних програм з математики, темі «Показникові рівняння» передує тема «Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція» в профільному рівні [11] та «Показникова функція та її властивості» на рівні стандарту [12]. Під час вивчення вказаних тем учні ознайомлюються з показниковою функцією, її основними властивостями та прикладами фізичних процесів, які описуються за допомогою неї. Такий взаємозв’язок між предметами забезпечує становлення стійкої мотивації учнів до вивчення предмету.

При розв’язуванні показникових рівнянь, як і при спрощенні виразів з показниками, учні спираються на навчальний матеріал 7-го класу теми «Степінь з натуральним показником» та «Властивості степеня з натуральним показником» [13], 8-го класу – «Степінь із цілим від’ємним показником» та «Властивості степеня із цілим показником» [14], 10-го класу – «Означення та властивості степеня з раціональним показником» [15] тощо. Цей матеріал, серед інших, включає у себе такі теореми [13]:

Теорема 1. Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n є справделивою рівність $a^m a^n = a^{m+n}$.

Теорема 2. Для будь-якого числа $a \neq 0$ та будь-яких натуральних чисел m і n таких, що $m > n$, є справделивою рівність $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Теорема 3. Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n є справедливою рівність $(a^m)^n = a^{mn}$.

Теорема 4. Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n є справедливою рівність $(ab)^n = a^n b^n$.

Найпростіші показникові рівняння розв’язуються на основі теореми та наслідку з неї [12]:

Теорема 5. При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.

Наслідок. Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Також, для розв’язування показникових рівнянь підвищеної складності учням необхідно пригадати властивості показникової функції та інших елементарних функцій.

Основні властивості показникової функції, які часто використовують при розв’язуванні показникових рівнянь є такі:

1. $a^x > 0, x \in (-\infty; +\infty)$;

2. Якщо $a > 1$, то $y = a^x$ зростає, якщо $0 < a < 1$, то $y = a^x$ спадає.

Графіки показникової функції при різних основах є такими [16]:

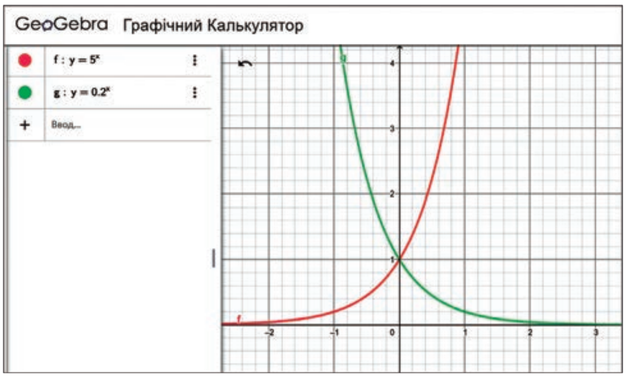

Рис. 1. Графіки показникової функції

Наведемо приклади найпростіших показникових рівнянь [11].

Приклад 1. Розв’язати рівняння: $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$.

Розв’язання: знайдемо розв’язок рівняння, скориставшись властивостями степеня з раціональним показником:

$(6^2)^x = (6^{-3})^{2-x} \Rightarrow 6^{2x} = 6^{-3(2-x)}$.

Далі, за наслідком з теореми 5 отримуємо: $2x = -3(2-x),\ x = 6$.

Відповідь: $x = 6$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння: $3^{x+2} + 3^x = 30$.

Розв’язання: скористаємося властивостями степеня та винесемо спільний множник за дужки: $3^x \cdot 3^2 + 3^x = 30 \Rightarrow 3^x(9+1) = 30 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Більш складні рівняння цього типу можуть бути такими [11].

Приклад 3. Розв’язати рівняння: $0,25\cdot 2^{x^2}=\sqrt[3]{0,25\cdot 4^{2x}}$.

Розв’язання: аналогічно до попередніх прикладів, перетворимо ліву і праву частини рівняння:

$$2^{-2}\cdot 2^{x^2}=(2^{-2}\cdot 2^{4x})^{\frac{1}{3}}\Rightarrow 2^{-2+x^2}=2^{\frac{-2+4x}{3}}\Rightarrow$$

$$-2+x^2=\frac{-2+4x}{3}.$$

Отримане квадратне рівняння має такі розв'язки: $x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=2$.

Відповідь: $x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=2$.

Приклад 4. Розв’язати рівняння: $4\cdot 2^{\cos x}=\sqrt{8}$.

Розв’язання: за властивістю степеня і наслідку з теореми 5 маємо: $2^2\cdot 2^{\cos x}=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow 2+\cos x=\frac{3}{2}$. Зробивши перетворення лівої і правої частини, отримаємо тригонометричне рівняння $\cos x=-0,5$. Розв’язки цього рівняння є такими:

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Відповідь: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

Наступну групу показникових рівнянь, які доцільно розглядати, є рівняння, які введенням заміни зводяться до квадратних [11].

Приклад 5. Розв’язати рівняння: $2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0$.

Розв’язання: Введемо заміну $t=2^x$, тоді після перетворень рівняння матиме вид $2t^2-5t+2=0$. Коренями даного рівняння є $t_1=\frac{1}{2},\ t_2=2$. Повертаємось до заміни і розв’язуємо показникові рівняння: $2^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-1$; $2^x=2\Rightarrow x=1$.

Відповідь: $x=1, x=-1$.

Приклад 6. Розв’язати рівняння: $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$.

Розв’язання: для зведення рівняння до квадратного скористаємося формулою для пониження степеня косинуса: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

Після перетворень рівняння матиме вид: $4^{\cos 2x}+2\cdot 2^{\cos 2x}=3$.

Введемо заміну: $t=2^{\cos 2x}$, тоді рівняння матиме вид: $t^2+2t-3=0$. Коренями даного рівняння є: $t_1=1,\ t_2=-3$.

Повертаємося до заміни та розв’язуємо два показникові рівняння:

$$2^{\cos 2x}=1\Rightarrow \cos 2x=0\Rightarrow 2x=$$
$$=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;$$

$2^{\cos 2x}=-3$ – рівняння не має розв’язку.

Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

Цікавими також є приклади у яких шляхом заміни змінної рівняння зводиться до дробово-раціонального [11].

Приклад 7. Розв’язати рівняння: $5^{\sqrt{x-2}}-5^{1-\sqrt{x-2}}-4=0$.

Розв’язання: скориставшись властивостями степеня та ввівши заміну $t=5^{\sqrt{x-2}}$, отримаємо наступне дробово-раціональне рівняння: $t-\frac{5}{t}-4=0$. Звівши до спільного знаменника та врахувавши, що знаменник ніколи не буде рівним нулю, отримаємо таке квадратне рівняння: $t^2-4t-5=0$. Коренями даного рівняння є такі: $t_1=-1,\ t_2=5$. Повернемось до заміни і розв’яжемо два рівняння:

$5^{\sqrt{x-2}}=-1$ – рівняння не має розв’язків;

$5^{\sqrt{x-2}}=5\Rightarrow\sqrt{x-2}=1\Rightarrow x-2=1\Rightarrow x=3$.

Відповідь: $x=3$.

Розглянемо кілька показникових рівнянь з параметрами [11]:

Приклад 8. При яких значеннях параметра a рівняння $25^x+5^{x+1}-a^2+a+6=0$ не має коренів?

Розв’язання: ввівши заміну $t=5^x$, отримаємо таке квадратне рівняння: $t^2+5t-a^2+a+6=0$.

Враховуючи властивості квадратичної та показникової функцій, можна прийти до висновку, що початкове рівняння не матиме коренів у двох випадках:

Випадок 1. Якщо квадратне рівняння $t^2+5t-a^2+a+6=0$ не має коренів.

Випадок 2. Якщо корені квадратного рівняння – недодатні числа.

Для кожного з випадків запишемо умови та знайдемо відповідні значення параметра a.

Випадок 1. $D=5^2-4\cdot 1\cdot(-a^2+a+6)<0$. Розв’яжемо відповідну квадратну нерівність. Для цього відкриємо дужки і розкладемо тричлен на множники. Отримаємо нерівність $(2a-1)^2<0$. Таким чином, робимо висновок, що даний випадок неможливий.

Випадок 2. Умову на недодатність коренів запишимо за допомогою теореми Вієта та розв’яжемо відповідну систему нерівностей:

$$\begin{cases}t_1+t_2\le 0,\\ t_1\cdot t_2\ge 0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5<0,\\ -a^2+a+6\ge 0\end{cases}\Rightarrow-(a+2)(a-3)\ge 0\Rightarrow a\in[-2;3].$$

Відповідь: $a\in[-2;3]$.

Приклад 9. При яких значеннях параметра a рівняння $(a-1)\cdot 3^{2x}-(2a-1)\cdot 3^x-1=0$ має два різних корені?

Розв’язання: зробимо заміну змінної $3^x=t$ і отримаємо квадратне рівняння $(a-1)\cdot t^2-(2a-1)\cdot t-1=0$. Очевидно, що випадок $a=1$ не задовольняє умову задачі.

Тоді, для того, щоб початкове рівняння мало два різні корені, необхідно врахувати властивості квадратичної та показникової функцій. А саме: дискримінант квадратного рівняння і обидва корені мають бути додатними. Аналітично це можна записати у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases}a\ne 1,\\ D>0,\\ t_1\cdot t_2>0,\\ t_1+t_2>0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\ne 1,\\ (2a-1)^2-4\cdot(a-1)\cdot(-1)>0,\\ \frac{2a-1}{a-1}>0,\\ \frac{-1}{a-1}>0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a^2-3>0,\\ \frac{2a-1}{a-1}>0,\\ a-1<0.\end{cases}$$

Розв’язком даної системи є інтервал $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Відповідь: $a\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Приклад 10. Знайти усі значення параметра a, при яких рівняння $(a-4)\cdot 9^x+(a+1)\cdot 3^x+2a-1=0$ не має розв'язків.

Розв'язання: Розглянемо два випадки:

Випадок 1: $a=4$. У цьому випадку, початкове рівняння набуває виду $5\cdot 3^x+7=0$. Легко переконатися що дане рівняння не має розв'язків.

Випадок 2: $a\neq 4$. Нехай $3^x=t$, тоді матимемо $(a-4)\cdot t^2+(a+1)\cdot t+2a-1=0$. Початкове рівняння не матиме розв'язків, якщо дане квадратне рівняння не матиме розв'язків або його корені будуть недодатніми числами. Запишемо дану умову аналітично:

$$\left[\begin{array}{l} D<0,\\ \begin{cases} t_1\le 0,\\ t_2\le 0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a+1)^2-4\cdot(a-4)\cdot(2a-1)<0,\\ \begin{cases} t_1+t_2\le 0,\\ t_1\cdot t_2\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} -7a^2+38a-15<0,\\ \begin{cases} -\dfrac{a+1}{a-4}\le 0,\\ \dfrac{2a-1}{a-4}\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\in\left(-\infty;\dfrac{3}{7}\right)\cup(5;+\infty),\\ \begin{cases} a\in(-\infty;-1]\cup(4;+\infty),\\ a\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup(4;+\infty).\end{cases}\end{array}\right.$$

Таким чином, враховуючи Випадок 1, можемо записати відповідь до задачі.

Відповідь: $a\in\left(-\infty;\dfrac{3}{7}\right)\cup[4;+\infty)$.

Приклад 11. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x}-a\right)\left(2^{2x}-10\cdot 2^x+16\right)=0$$

має два різних корені?

Розв'язання: При розв'язуванні даного рівняння слід звернути увагу на область допустимих значень функції $y=\sqrt{x}$. Таким чином, ми маємо перше обмеження: $x\ge 0$.

Далі розіб'ємо рівняння на два:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=a,\\ 2^{2x}-10\cdot 2^x+16=0.\end{array}\right.$$

Пропонується почати розв'язування з другого рівняння, адже воно, шляхом введення заміни $2^x=t$ зводиться до квадратного рівняння: $t^2-10t+16=0$. Коренями даного рівняння є $t_1=2$, $t_2=8$. Повернувшись до заміни, отримаємо: $x_1=1$, $x_2=3$.

Виконаємо наліз першого рівняння з сукупності рівнянь, в залежності від значень параметра a. Використовуючи властивості функції $y=\sqrt{x}$, розглянемо два випадки:

– якщо $a\ge 0$, то розв'язком рівняння $\sqrt{x}=a$ є $x=a^2$;

– якщо $a<0$, то рівняння $\sqrt{x}=a$ не має розв'язків.

Повернемося до початкового завдання. Якщо задане в умові рівняння матиме тільки два різних корені, то очевидно, що це будуть значення $x_1=1$, $x_2=3$. Це можливо у тому випадку, коли рівняння $\sqrt{x}=a$ не має коренів (при $a<0$) або коли його корінь співпадає з одним із вже згаданих. Для того, щоб знайти ці значення параметра a, розв'яжемо два рівняння:

$$\begin{cases} a^2=1,\\ a\ge 0;\end{cases} \text{ та } \begin{cases} a^2=3,\\ a\ge 0.\end{cases}$$

Розв'язками цих рівнянь є такі значення: $a=1$ та $a=\sqrt{3}$.

Відповідь: $a\in(-\infty;0)\cup\left\{1;\sqrt{3}\right\}$.

Окрему групу рівнянь з параметрами утворюють рівняння, розв'язання яких опираються на властивості елементарних функцій. Розглянемо такі рівняння [11].

Приклад 12. Розв'язати рівняння: $2^x=3-x$.

Розв'язання: На першому етапі розв'язування даного рівняння легко помітити, що $x=1$ є його коренем.

Далі, продовжуючи дослідження рівняння, варто згадати властивості функцій, які є лівою і правою частинами даного рівняння.

Функція $y=2^x$ є показниковою функцією з основою більшою за 1. Таким чином, ця функція є зростаючою. В свою чергу, функція $y=3-x$ є лінійною функцією з кутовим коефіцієнтом $k=-1$. Ця функція є спадною.

З даних міркувань робимо висновки, що функції перетинаються тільки в одній точці і ця точка $(1;2)$. Зобразимо це графічно, використовуючи графічний калькулятор GeoGebra (рис. 2) [16]:

Рис. 2. Графіки функцій до прикладу 12

Відповідь: $x=1$

Приклад 13: Розв'язати рівняння $3^{x-2}=\dfrac{9}{x}$.

Розв'язання: Аналогічно, до попереднього прикладу, методом підбору можна переконатися, що $x=3$ є коренем заданого рівняння.

Розглянемо дві функції: $y=3^{x-2}$ та $y=\dfrac{9}{x}$. Перша функція є показниковою, з основою більшою за 1, а, отже, вона є зростаючою та завжди набуває додатних значень. Друга функція – обернена пропорційність, графіком якої є гіпербола з вітками в першій та третій координатних четвертях. В кожній з четвертей ця функція спадає.

Продовжуючи дослідження, відзначимо, що ці функції можуть перетнутися тільки в першій координатній четверті. Тому, рівняння має єдиний розв'язок. Зобразимо це графічно (рис. 3):

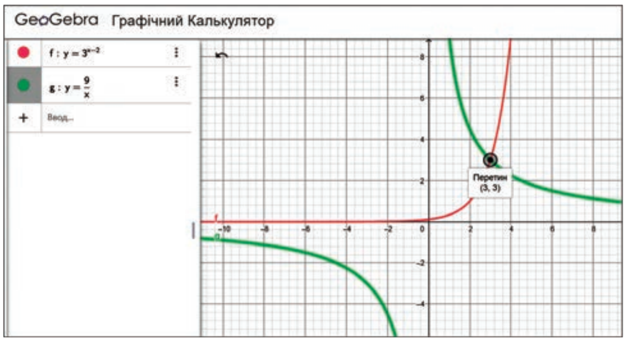

Рис. 3. Графіки функцій до прикладу 13

Відповідь: $x = 3$

Розглянуті приклади та підходи до їх розв'язання показують, що в процесі опанування теми «Показникові рівняння» в учнів продовжують формуватися математичні компетентності.

Процедурна компетентність:

– шляхом розв'язування достатньої кількості рівнянь кожного типу, учень вивчає та запам'ятовує відповідні алгоритми, які в подальшому може застосовувати як для показникових рівнянь, так і до задач, де ці рівняння мають місце;

– при розв'язуванні рівнянь, які зводяться до квадратних та дробово-раціональних учень навчається розпізнавати такі рівняння та розв'язувати їх вивченими раніше методами;

Логічна компетентність:

– при розв'язуванні задач з параметром учень аналізує властивості всіх функцій, які входять у відповідне рівняння та обгрунтовує логічні висновки щодо розв'язків задачі;

– в ході розв'язання рівнянь та виконання записів, учень набуває досвіду у використанні математичних та логічних символів на практиці.

Дослідницька компетентність формується при інтерпретації та систематизації отриманих результатів, наприклад, при розв'язуванні задач з параметрами.

Методологічна компетентність вдосконалюється при прийнятті рішень щодо вибору методу розв'язання заданого рівняння.

Таким чином, тема «Показникові рівняння» є важливою в процесі формування математичних компетентностей учнів старших класів загальноосвітніх шкіл.

Висновки і пропозиції. Виконавши аналіз різних типів показникових рівнянь, методів і прийомів їх розв'язання показав, що тема «Показникові рівняння» в програмі 11 класу загальноосвітніх шкіл займає вагоме місце та потребує ретельного вивчення. Теоретичні основи розв'язування показникових рівнянь складають різні розділи елементарної математики. Від рівня володіння даними розділами залежить ефективність і правильність розв'язання задач з показниковими рівняннями. В процесі вивчення даної теми учні мають змогу продовжити формування власних математичних компетеностей.

Наступним етапом дослідження може бути вивчення прийомів розв'язування показникових нерівностей.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту

2. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень

3. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень

4. Сафонова І. Я. Формування математичної компетентності у старшокласників. Актуальні проблеми державного управління, педагогіки та психології. 2013. № 2. С. 397–402, (2), 397–402.

5. Головань М. Математична компетентність: сутність та структура. 2014.

6. Оопрієнко О. В. Компетентнісно зорієнтовані задачі як засіб формування математичної компетентності учнів. *Початкова школа*. 2013. № 3 (525). С. 23–26.

7. Онопрієнко О. В. Предметна математична компетентність як дидактична категорія. *Початкова школа*. 2016.

8. Мазур О. К. Індивідуальна траекторія підготовки до ЗНО. Показникові рівняння. 2012.

9. Томащук О. П., Репета В. К., Лещинський О. Л. Методика викладання теми «Розв'язування показникових рівнянь». 2019.

10. Васильєва Л. Я., Пархоменко О. Ю., Дармосюк В. М. Методика викладання математики. Показникова, логарифмічна функції (рівняння та нерівності). 2022.

11. Мерзляк А.Г., Номіровський Д. А., Полоньсикй В. Б. та ін. «Алгебра і початки аналізу: проф. рівень»: підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. – Х.: Гімназія, 2019. – 352 с.

12. Мерзляк А.Г., Номіровський Д. А., Полоньсикй В. Б. та ін. «Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту»: підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2019, 208 с.

13. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. «Алгебра»: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х: Гімназія, 2015. 256 с.

14. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. «Алгебра»: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х: Гімназія, 2015. 240 с.

15. Мерзляк А.Г., Номіровський Д. А., Полоньский В. Б., Якір М.С. «Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту»: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2018, 256 с.

16. Графічний калькулятор GeoGebra. Режим доступу: https://www.geogebra.org/