ДИДАКТИКО-МЕТОДИЧНИЙ КОНТЕКСТ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ВОРНІКУ-ШУРА ДЛЯ ДОВЕДЕННЯ ДЕЯКИХ ТИПІВ НЕРІВНОСТЕЙ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

DIDACTIC-METHODOLOGICAL CONTEXT OF APPLICATION OF THE VORNICU-SCHUR THEOREMS FOR PROVING SOME TYPES OF INEQUALITIES OF MATHEMATICAL OLYMPIADS

УДК 378.046.4:[373.5.016:51]:[512.13+517.17]
DOI https://doi.org/10.32782/2663-6085/2023/67.2.5

Мітельман І.М.,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри методики викладання і змісту освіти
Комунального закладу вищої освіти «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради»

У статті продовжуються дослідження дидактичної системи, спрямованої на оволодіння сучасними методами доведення олімпіадних нерівностей у контексті фундаменталізації післядипломної освіти вчителя математики, синхронізації зон математичного розвитку учнів (базової, навчальної, навчально-теоретичної та навчально-дослідницької) і зон методичного розвитку вчителя. Доведення нерівностей спирається на творчо опрацьований арсенал відомих нерівностей та їхніх узагальнень, спеціальних теорем, нестандартно використовує алгебраїчну техніку, інструментарій математичного аналізу тощо. Для проєкції деяких методів доведення нерівностей олімпіад високого рівня на систематичну практику в статусі продуктивного дидактичного ресурсу досить часто не вистачає валідних обсягів прототипного навчального контенту. Метою статті є блочне моделювання «компактної» системи задач, теоретичних положень та математичних прийомів, пов'язаних із доведеннями симетричних однорідних нерівностей з трьома змінними, які доцільно зводити до застосування теорем Ворніку-Шура. Для більшості розглянутих задач є можливість порівнювати різні способи розв'язування, реалізовувати таксонометричні підходи щодо аналізу, синтезу, рефлексивного оцінювання якості закріплення освітнього результату. При цьому, як і в інших наших дослідженнях, «індивідуальність» кожної задачі підпорядковано парадигмі цілісності дидактичної системи.
Отримані результати сприяють ефективному відбору й адаптації змісту навчання обдарованих учнів, трансформації програм підвищення кваліфікації творчого вчителя математики, орієнтованих на його компетентнісний розвиток з точки зору послідовного обґрунтованого розширення наукових знань. До того ж, використання матеріалів дослідження стане в пригоді для самостійного складання нових олімпіадних задач і для модернізації тематичних джерел роботи зі студентами закладів вищої педагогічної освіти.
Ключові слова: *підвищення кваліфікації вчителів, математична та методична компетентність, методика навчання математики, математично обдаровані учні, олімпіадні задачі з математики, методи доведення симетричних однорідних нерівностей.*

The article continues a study of the didactic system focused on mastering the modern methods of proving olympiad inequalities in the context of fundamentalization of postgraduate mathematics teachers' education and of synchronisation of students' mathematical development and the domains of methodological development of teachers. The proving inequalities is based on a creatively processed arsenal of well-known inequalities and their generalisations, special theorems, non-standard use of algebraic techniques, tools of mathematical analysis, etc. To project some methods of proving inequalities of high-level mathematical competitions into systematic practice as a productive didactic resource, there is often a lack of existing valid volumes of prototype educational content. The purpose of the paper is block modelling a «compact» system of problems, theoretical concepts and mathematical procedures related to proof of symmetric homogeneous inequalities with three variables, which can be reduced to the application of the Vornicu-Schur theorems. For most of the problems considered, it is possible to compare different ways of solving, to implement taxonomic approaches to analysis, synthesis and reflective evaluation of the quality of learning results. At the same time, as in other our researches, the «individuality» of each example is subordinated to the paradigm of the integrity of the didactic system.
The results obtained provide for the effective selection and adaptation of the content of the teaching of gifted students, the transformation of in-service training programmes for creative mathematics teachers orientated towards their competence growth via the gradual and reasonable expansion of scientific knowledge. In addition, the use of the research materials will be useful for creating original olympiad problems and for modernising thematic sources of work with students of higher pedagogical education institutions.
Key words: *professional teacher development, mathematical and methodological competence, mathematics teaching methodology, mathematically gifted students, olympiad-type problems in mathematics, methods for proving symmetric homogeneous inequalities.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. Світовий та вітчизняний методичний і практичний досвід роботи з математично обдарованими учнями демонструють значущість теорії доведення нерівностей як одного з найважливіших розділів класичної олімпіадної підготовки на всіх її рівнях. Систематизація, узагальнення й адаптація математичних і дидактико-методичних ресурсів цього розділу має бути впливовою компонентою навчальних програм підвищення кваліфікації вчителів математики, спрямованих на створення згорнутих дидактичних структур засобами спеціалізації й трансформації теоретичного матеріалу високого рівня складності [2].

Національна доктрина розвитку освіти, затверджена Указом Президента України від 17.04.2002

№ 347/2002, визначає поєднання освіти й науки обов'язковою умовою модернізації системи освіти на основі її фундаменталізації. Фундаменталізацію освіти проголошено одним з пріоритетів Болонського процесу (спеціальний меморандум ЮНЕСКО, 1994 р.), і тому, як довели дослідження С. У. Гончаренка, М. М. Ковтонюк, Г. О. Васьківської та ін., принцип фундаменталізації освітнього процесу слід розглядати як універсальну дидактичну категорію, на якій базується сучасна багаторівнева освіта. Кафедра методики викладання і змісту освіти Одеської академії неперервної освіти впроваджує парадигму цілісності предметно-методичних компетентностей учителя під час підвищення кваліфікації засобами моделювання теоретичних і практичних кейсів у колективній та колективно розподіленій творчості [3]. Вважаємо, що проаналізовані Н. В. Захарчук [1] підходи до систематизації та відбору змісту освіти в умовах фундаменталізаційних процесів у старшій профільній школі та в закладах вищої освіти на засадах ґрунтовності, глибини засвоєння та структурованості знань є актуальними і для післядипломної (неперервної) педагогічної освіти, професійного розвитку вчителя з точки зору його знаннєвої культури, послідовного розширення наукових знань, отриманих під час здобуття вищої освіти.

Математичний і дидактико-методичний супровід підготовки учнів до математичних змагань (у тому числі й у сегменті підвищення кваліфікації самих учителів) повинні повною мірою спиратись на принципи фундаменталізації, позаяк змістовий контент олімпіад часто генерується творчим доробком математиків-дослідників, які перетворюють наукові сюжети (результати) на олімпіадні задачі. Навчання розв'язування складних олімпіадних задач неодмінно інтегрується з постійним оновленням наукових знань усіх учасників освітнього процесу. Отже, існують складні проблеми концентрації матеріалу, запобігання безпідставному зниженню якості його викладення (для прикладу, доведення нових для вчителів і учнів теорем містять важливі ідеї створення й розв'язування задач, навчають поєднувати між собою різні математичні прийоми, а тому розбір доведень теоретичних фактів є принциповим аспектом фундаменталізації олімпіадної підготовки). Потрібно постійно слідкувати за новими публікаціями, що можуть реально вплинути на виникнення нових типів задач, нових методів розв'язування вже відомих задач тощо. Для олімпіадних задач – незалежно від дидактичної типології (репродуктивні, евристичні, пошукові, творчі) – є доцільним врахування *таксонометричних підходів* щодо ієрархії цілей, процесів і результатів у когнітивній області. Методична ефективність та якість закріплення освітнього результату як у навчанні обдарованих учнів, так і в роботі з вчителями значно підвищується, якщо виокремлення та координація математичних і дидактичних зв'язків відбувається в режимі поступового мотивованого руху задачно-теоретичними ланцюжками та / або блоками, в яких для більшості задач є можливість обговорювати різні способи розв'язування, засобами аналізу, синтезу, рефлексивного оцінювання формувати й синхронно наповнювати *зони найближчого математичного розвитку учнів* і відповідні *зони фахового розвитку вчителя* [4; 5; 7].

Ми вважаємо, що в навчанні учнів з підвищеними математичними освітніми потребами, у професійному розвитку педагогів-математиків теорія доведення нерівностей виявилась одним з найбільш відкритих для реалізації принципів фундаменталізації розділів. Методи доведення олімпіадних нерівностей пов'язані з розгалуженим арсеналом відомих (еталонних) нерівностей, спеціальних теорем; до завдань олімпіад потрапляють і нерівності, які виникають під час математичних наукових досліджень. Доведення нерівностей використовує і доволі нестандартну алгебраїчну техніку, понятійний та операційний інструментарій математичного аналізу, чимало нерівностей потребують геометричної інтерпретації. Актуалізується – у тому числі й на стадії цілепокладання – загальна наукова проблема поєднання сучасної методики навчання доведення нерівностей зі стимулюванням опанування нового математичного середовища на рівні синхронізації компетентнісних контурів здобувачів профільної вищої освіти, викладачів закладів вищої освіти, стейкхолдерів післядипломної педагогічної освіти, обдарованих учнів тощо [4].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивчення нерівностей симетричної та циклічної структури є одним з найбільш важливих розділів теорії доведення нерівностей. Це повною мірою проєктується на науково-методичний контент, стратегії його узагальнення, конвертації та багаторівневої адаптації. Серед численних публікацій – класичних і сучасних, – присвячених названій тематиці, виділимо роботи таких науковців, як T. Andreescu, V. Cîrtoaje, Z. Cvetkovski, Ph. Hung, R. Manfrino, R. F. Muirhead, A. W. Marshall, I. Olkin, J. Ortega, R. Delgado, Ph. Tran, H. Lee, K. Li, I. Schur, N. D. Tung, Z. Y. Zhe, M. Teleucă, В. Б. Брайман, В. М. Лейфура, Д. А. Номіровський, Д. В. Радченко, В. А. Ясінський та ін. Змістовний теоретичний та задачний матеріал розміщується та постійно оновлюється на відкритих інтернет-ресурсах міжнародних та національних математичних олімпіад, персональних web-сторінках авторитетних фахівців, включається до збірників задач тощо.

В основі багатьох розвідок лежить відома теорема (та/або сам метод її доведення) І. Шура (Issai Schur, 1876–1941), яка стверджує, що для $\lambda \geq 0$ і довільних невід'ємних чисел a, b і c виконується нерівність $\sum_{\text{cycl}} a^{\lambda}(a-b)(a-c) \geq 0$ (звісно, для λ = 0 ми «формально» приймаємо, що $u^0 = 1$ для всіх $u \in \mathbb{R}$). У 2003 р. В. Ворніку (Valentin Vornicu) запропонував ефектні й продуктивні узагальнення теореми Шура, якими розширюється та вдосконалюється науковий арсенал здобувачів математичної освіти на всіх рівнях.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Створення належного дидактико-методичного ресурсу у вигляді евристично-орієнтованого комплексу потребує значних масивів навчального матеріалу, на якому нові методи розв'язування демонструються й порівнюються з відомими та раніше засвоєними. Для введення до систематичної освітньої практики теорем Ворніку-Шура в якості метода доведення нерівностей, як показує аналіз фахової літератури, не вистачає релевантних обсягів «виразного» прототипного задачного контенту обґрунтованої дидактичної значущості. До того ж, вважаємо, не було виокремлено «лінійку» математичних і методичних кроків (інколи – досить нестандартних і технічно трудоємних), якими задачі високого рівня складності можуть зводитись до безпосереднього застосування цих теорем.

Мета статті. Стаття ставить за мету продовження розробок і використання на фундаменталізаційному треку післядипломної освіти вчителів математики предметно-методичних тематичних блоків щодо розв'язування задач математичних олімпіад [4; 5]. Ми розглядаємо моделювання навчальної системи задач, теоретичних положень та оригінальних і, значною мірою, універсальних математичних прийомів, пов'язаних із доведеннями симетричних однорідних нерівностей з трьома змінними, які можливо звести до дослідження (оцінювання) сум спеціального вигляду за допомогою теорем Ворніку-Шура.

Виклад основного матеріалу. У багатьох статтях та посібниках наводяться приклади застосування *нерівності трьох квадратів* ($a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$) *a*, *b* і *c*, – довільні дійсні числа) для доведення нерівностей. Дана класична нерівність доводиться багатьма способами, серед яких є і цілком «шкільні», і такі, що вимагають більш поглибленої (олімпіадної) підготовки (зокрема, використання нерівності Коші-Буняковського, методу впорядкованих наборів, розглядання властивостей квадратичної функції $f(a) = a^2 - a(b+c) + (b^2+c^2-bc)$ тощо). Саме це має утворювати *перший блок* оволодіння новими компетентностями з обраного питання. Водночас, симетрична нерівність трьох квадратів може подаватись у вигляді $(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b) \geq 0$, тобто $\sum_{\text{cycl}}(a-b)(a-c) \geq 0$. Оскільки ми можемо вважати, що $a \geq b \geq c$, то доведення випливає з того, що тоді $(c-a)(c-b) \geq 0$, $(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c) = (a-b)^2 \geq 0$. Оскільки $ab+bc+ca \leq |a||b|+|b||c|+|c||a|$, то нерівність трьох квадратів достатньо довести для невід'ємних чисел, і ми бачимо, що вона є окремим випадком теореми Шура саме для *λ* = 0. Зауважимо, що нерівність трьох квадратів достатньо доводити лише для додатних *a*, *b* і *c*, і тому зазначена вище домовленість є зайвою.

Другим методичним блоком виступає практикум на доведення олімпіадних нерівностей за допомогою нерівності Шура, який можна створити за публікаціями [8–10; 12].

Розглянемо вираз (циклічну суму) $\Re_f(a,b,c) = \sum_{\text{cycl}} f(a)(a-b)(a-c)$, який, як легко переконатись, є симетричним.

Теорема 1 (В. Ворніку). Нехай $f: \langle \alpha; \beta \rangle \to \mathbb{R}_+$ – неспадна на проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$ функція, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Тоді для будь-яких чисел, *a*, *b* і *c*, з проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$ має місце нерівність $\Re_f(a,b,c) \geq 0$.

Теорема 2 (В. Ворніку). Нехай $f: \langle \alpha; \beta \rangle \to \mathbb{R}_+$ – опукла донизу на проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$ функція, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Тоді для будь-яких чисел *a*, *b* і *c*, з проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$ має місце нерівність $\Re_f(a,b,c) \geq 0$.

(Ми використовуємо позначення $\langle \alpha; \beta \rangle$, позаяк теореми **1** і **2** виконуються для всіх типів проміжків – скінченних чи нескінченних: (a; β), [a; β], (a; β], [a; β)).

Як *третій методичний блок* пропонуємо опрацювання й аналіз доведень теорем **1** і **2** [13; 14].

З теорем Ворніку випливає, що нерівність Шура справджується, зокрема, і в таких випадках: *а*) *a*, *b* і *c*, – будь-які додатні дійсні числа, *λ* – довільне число; *б*) *a*, *b* і *c*, – будь-які дійсні числа, *λ* – парне натуральне число.

Під час опанування методики доведення симетричних нерівностей з трьома змінними (розглядаються нерівності, що дозволяють скористатись властивостями однорідності) зведенням до теорем Ворніку (Ворніку-Шура) виникає проблема техніки подання доводжуваних нерівностей у рівносильній формі $\Re_f(a,b,c) \geq 0$ з такою функцією *f* (якщо вона існує), яка б задовольняла умови теореми **1** чи теореми **2** (*четвертий методичний блок*).

Проілюструємо формування цього методичного блоку (і прийоми знаходження потрібної функції, споріднені з розв'язуванням функціональних рівнянь) низкою навчальних прикладів. У фаховій та навчальній літературі містяться різноманітні (також і формально більш прості) способи розв'язування цих задач, і тому варто починати розбір кожної з них оглядом альтернативних методів доведення.

Задача 1 (*нерівність трьох квадратів*). Доведіть, що $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, де *a*, *b* і *c*, – довільні дійсні числа.

Розв'язання. Для знаходження потрібної функції *f* у співвідношенні $a^2+b^2+c^2-ab-bc+ca =$

$\sum_{\text{cycl}} f(a)(a-b)(a-c)$ (**1.1**) покладемо $b = c$. Тоді для всіх дійсних чисел a і b справджується рівність $f(a)(a-c)^2 = (a-c)^2$. Розглядаючи такі випадки: $c = 0$ і $a \neq 0$; $c \neq 0$ і $a = 0$, отримуємо, що, з **необхідністю**, $f(a) \equiv 1$. Перевіряємо, що для функції $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, має місце тотожність (1.1). Для цієї функції можемо застосовувати обидві теореми Ворніку. ■

Задача 2 (*нерівність Коші для трьох чисел*). Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних чисел a, b і c виконується нерівність

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc. \qquad (\mathbf{2.1})$$

Розв'язання. Однорідність (тобто нерівність не змінюється, якщо a, b і c, замінити, відповідно, на $\mu\alpha$, μb і μc; $\mu > 0$ – довільне) дозволяє вважати, що $a + b + c = 1$, тобто далі розглядати лише множину Ω $\{(a, b \text{ і } c) : a + b + c = 1;\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0\}$. У співвідношенні $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \sum_{\text{cycl}} f(a)(a-b)(a-c)$ (**2.2**) візьмемо $b = c$ і одержимо: $a(a^2 - b^2) + 2b^2(b-a) = f(a)(a-b)^2$, $a > 0,\ b > 0,\ a + 2b = 1$. Після спрощення маємо як **наслідок**, що $f(a) = 1$ для $a \in (0; 1) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$(ми враховуємо, що $b \neq a$ для таких a). Для визначення $f\left(\frac{1}{3}\right)$ ми у (2.2) покладемо $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}$. Тоді $a + b + c = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, f\left(\frac{1}{6}\right) = 1$, і з рівності (2.2) знаходимо, що й $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$. Слід перевірити, що на множині Ω для функції $f(x) = 1$, $x \in (0; 1)$, насправді виконується рівність (2.2). Для цього зручніше навіть переконатись, що для всіх дійсних чисел a, b і c має місце тотожність $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = (a + b + c) \sum_{\text{cycl}}(a-b)(a-c)$ (множник $a + b + c$ відповідає на введення обмеження $a + b + c = 1$, а також забезпечує «баланс» степенів многочленів у правій та лівій частині рівності). Функція f на проміжку (0 ; 1) задовольняє умови як теореми **1**, так і теореми **2**.

Задача 3 (*A. Nesbitt*). Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних чисел a, b і c виконується нерівність

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \qquad (\mathbf{3.1})$$

Розв'язання. Нерівність Несбітта традиційно відноситься до *модельних* задач, на яких учителям, студентам та учням демонструються можливості різних методів доведення. Зокрема, нерівність (3.1), як відомо, стандартними перетвореннями зводиться до рівносильної очевидної нерівності $\sum_{\text{cycl}}$, $(a-b)^2(a+b) \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, але наша мета – переконатись у «потужності» теорем **1** і **2**. Для нерівності Несбітта можемо врахувати ще й властивість однорідності, і ми додатково вважаємо, що $a + b + c = 1$. Розглядаємо нерівність (2.1) та, відповідно, співвідношення $\Sigma_{\text{cycl}} (a-b)^2 (a+b) = \Sigma_{\text{cycl}} f(a)(a-b)(a-c)$ (**3.2**) на множині $\Omega = \{(a, b \text{ і } c) : a + b + c = 1;\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0\}$. Візьмемо $b = c$. Тоді $f(a)(a-b)^2 = 2(a-b)^2(a+b)$, коли $a + 2b = 1$, $a > 0$, $b > 0$. Якщо $a \in (0; 1) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$, то $b \neq a$, і $f(a) = 2a + 2b$, $f(a) = 2a + 1 - a$, тобто $f(a) = a + 1$ для будь-якого $a \in (0; 1) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. Покладемо у (3.2) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, і обчислимо $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$. Отже, $f(a) = a + 1$ для всіх $a \in (0; 1)$. Перевіряємо, що для функції $f(x) = x + 1$, $x \in (0; 1)$, на множині Ω справджується рівність (3.2) (для цього зручно безпосередньо перевірити рівність

$$\Sigma_{\text{cycl}} (a-b)^2 (a+b) = \Sigma_{\text{cycl}} (2a + b + c)(a-b)(a-c) \qquad (\mathbf{3.3})$$

для довільних дійсних чисел a, b і c). Знов-таки, функція f на проміжку (0; 1) задовольняє умови як теореми **1**, так і теореми **2**. Зауважимо, що «побачити» тотожність (3.3), щоб увести обмеження $a + b + c = 1$ і лише після цього застосувати теореми Ворніку, досить складно. ■

Задача 4. Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних чисел a, b і c виконується нерівність

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}. \qquad (\mathbf{4.1})$$

Розв'язання. Нерівність (3.1) запишемо у вигляді $\sum_{\text{cycl}} \frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2} \geq 0$ (**4.2**). Нерівність (3.1) дозволяє – з урахуванням однорідності – ввести обмеження $a + b + c = 1$, після чого нерівність (4.2) набуде вигляду $\Sigma_{\text{cycl}}\ f(a)\ (a-b)\ (a-c) \geq 0$, де $f(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ $t \in (0; 1)$. Функція f на інтервалі (0; 1) задовольняє умови обох теорем Ворніку. ■

Задача 5. Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних чисел a, b і c виконується нерівність

$$\frac{bc(b+c)}{a^2+bc} + \frac{ca(c+a)}{b^2+ca} + \frac{ab(a+b)}{c^2+ab} \geq a + b + c. \qquad (\mathbf{5.1})$$

Розв'язання. Потрібна нам нерівність буде випливати з *нерівності трьох квадратів*, якщо подати (4.1) у рівносильному вигляді

$$\frac{abc(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)} \geq 0 \qquad (\mathbf{5.2})$$

Але ми шукаємо підходи до задачі, пов'язані з теоремами Ворніку.

Запишемо нерівність (4.1) у вигляді

$$\sum_{\text{cycl}} \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc} \geq 0 \qquad (\mathbf{5.3})$$

Зауважимо, що тут виникає «ризик» обрати «хибний» шлях – виникає так звана *хибна асоціація* [2]. Однорідність дозволяє вважати, що $abc = 1$, і нерівність (5.3) матиме вигляд $\Re$ $f(abc) \geq 0$, де $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$. Утім, функція f на проміжку $\left[0; \sqrt[3]{2}\right]$ зростає, на проміжку $\left[\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$ спадає, на проміжках $\left[0; \sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}\right]$ і $\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}; +\infty\right)$ і є опуклою донизу, на проміжку $\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}; \sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}\right]$ – опуклою догори. Отже, у такий спосіб застосувати теореми Ворніку не вдається.

Нерівність (5.1) також може бути записаною у формі

$$\frac{abc}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}\sum\nolimits_{\text{cycl}}(a^2+ab+bc+ca)$$

$$(a-b)(a-c)\geq 0.$$

Однорідність ми використаємо у вигляді рівності $ab + bc + ca = 1$, унаслідок чого приходимо до нерівності $\Re\, f(a, b, c) \geq 0$ для опуклої донизу функції $f(x) = x^2 + 1$. ■

Інші способи доведення для прикладів **4** і **5** наводяться в [14].

Задача 6 (*Nguyen Duy Tung*). Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних чисел a, b і c виконується нерівність

$$a^2+b^2+c^2+abc\sum\nolimits_{\text{cycl}}\frac{b+c}{a^2+bc}\geq 2(ab+bc+ca). \quad (\mathbf{6.1})$$

З урахуванням вигляду нерівності (5.1) доречно використати однорідність уведенням обмеження $abc = 1$. За таких умов на множині $\Omega = \{(a, b, c)\colon abc = 1;\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0\}$ будемо намагатись замінити нерівність (6.1) рівносильною нерівністю вигляду $\Re\, f(a, b, c) \geq 0$ так, щоб можна було використати результати Ворніку. Візьмемо $b = c$, і тоді $ab^2 = 1$. Якщо $a \neq b$ (тобто $a \neq 1$), то на множині $\{(a, b, c)\colon abc = 1;\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ b = c,\ a \neq 1\}$ з рівності

$$a^2+b^2+c^2+abc\sum\nolimits_{\text{cycl}}\frac{b+c}{a^2+bc}-2(ab+bc+ca)=$$

$$=\sum\nolimits_{\text{cycl}}f(a)(a-b)(a-c) \quad (\mathbf{6.2})$$

випливає, що для всіх $a \in (0;+\infty)\backslash\{1\}$ $f(a)=\frac{a^3}{a^3+1}$. Для $a=1, b=2, c=\frac{1}{2}$ рівність (6.2) дає $f(1)=\frac{1}{2}$. Отже, з необхідністю, $f(x)=\frac{x^3}{x^3+1}$ для всіх дійсних $x > 0$.

Перевірку зручно зробити, безпосередньо переконавшись, що

$$a^2+b^2+c^2+abc\sum\nolimits_{\text{cycl}}\frac{b+c}{a^2+bc}-2(ab+bc+ca)-$$

$$-\sum\nolimits_{\text{cycl}}\frac{a^2}{a^2+bc}(a-b)(a-c)=0$$

для всіх a, b і c таких, що $(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\neq 0$.

Функція f зростає на множині $(0;+\infty)$ і тому залишається застосувати теорему **1**. ■

Інше доведення для нерівності (6.1) міститься у [11, с. 14].

Задача 7. Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних чисел a, b і c виконується нерівність

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2. \quad (\mathbf{7.1})$$

Розв'язання. Використаємо однорідність уведенням додаткової умови $ab + bc + ca = 1$ і будемо на множині $\Omega = \{(a, b, c)\colon ab + bc + ca = 1;\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0\}$ зводити нерівність (7.1) до конструкції $\Re_f(a, b, c) \geq 0$. На множині Ω різницю лівої та правої частини нерівності (7.1) подамо у вигляді $\sum_{\text{cycl}}(a)(a-b)(a-c)$. Якщо взяти $b = c$, то $2ab + b^2 = 1$ і $\frac{a^2(a-b)^2}{(a+b)^2(2a+b)b}=f(a)(a-b)^2$, тобто $\frac{a^2(a-b)^2}{(a+b)^2}=f(a)(a-b)^2$. Для $a\neq\frac{1}{\sqrt{3}}$ (це означає, що $a \neq b$) ми маємо з необхідністю, що $f(a)=\frac{a^2}{1+a^2}$. Для обчислення значення $f(a)$ в точці $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ візьмемо $b=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $c=\frac{5}{3\sqrt{3}}$. Тоді $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)\in\Omega$, $f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{13}$, $f\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{25}{52}$. З рівності $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}-2=\sum_{\text{cycl}}f(a)(a-b)(a-c)$ знаходимо $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}$. Ми встановили, що якщо потрібна функція f існує, то вона повинна мати вигляд $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, $x>0$. Така функція f зростає на проміжку $(0;+\infty)$. Залишається стандартними перетвореннями перевірити в Ω рівність

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}-\frac{a^2(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)}-$$

$$-\frac{b^2(b-a)(b-c)}{(b+a)(b+c)}-\frac{c^2(c-a)(c-b)}{(c+a)(c+b)}=2.$$ ■

Зазначимо, що нерівність (7.1) міститься серед завдань для застосування інших методів доведення нерівностей у [6].

Висновки та перспективи подальших розвідок. Дослідження й системне впровадження в практику післядипломної освіти сучасних підходів до доведення нерівностей є важливим формувальним кроком забезпечення фундаменталізації професійного зростання, виводять учителів на високий компетентнісний рівень реалізації математичної та методичної інтеграції провідних змістових ліній, створює передумови для самостійної пошукової діяльності вчителя, удосконалення навичок аналізу матеріалів олімпіад високого рівня щодо зв'язків задач з новими теоретичними фактами та узагальненнями відомих результатів. Запропонований компактний дидактичний комплекс торує шлях для методики нових доведень: від добре відомих нерівностей (таких, як нерівність трьох квадратів, нерівність Коші для трьох чисел, нерівність Несбітта) – до задач сучасних математичних змагань.

Вважаємо важливим подальше вивчення продуктивного комбінування розібраних методів з іншими техніками доведення нерівностей відповідної структури з практики математичних змагань високого рівня. Такого напряму пропонуємо дотримуватись і під час формування у студентів математичних спеціальностей наукової та дидактичної ресурсної основи майбутньої роботи з математично обдарованими учнями, модернізації тематичних джерел для кваліфікаційних робіт студентів закладів вищої педагогічної освіти. Вартують аналогічної дидактико-методичної уваги шляхи розвинення результатів І. Шура та В. Ворніку, які запропонували, зокрема, D. Grinberg, B. Finta. Використання матеріалів статті може стати в пригоді для самостійного складання нових задач і для проведення занять з підготовки школярів і студентів до математичних олімпіад.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Захарчук Н. В. Принципи відбору змісту освіти у контексті фундаменталізаційних процесів. *Вісник Національного авіаційного університету. Серія: Педагогіка. Психологія.* 2015. № 6. (Електронне видання). URL: https://jrnl.nau.edu.ua/index.php/VisnikPP/article/view/10199 (дата звернення: 01.01.2024).
2. Мітельман І. М. Розвиток предметно-галузевих компетентностей учителів математики в контексті формування згорнутих дидактичних структур. *Професійна компетентність сучасного педагога: методологія, теорія, методика, практика* : колект. моногр. Одеська акад. неперервної освіти. Одеса : видавець Букаєв Вадим Вікторович, 2019. С. 241–257.
3. Мітельман І. М. Особливості моделювання спеціалізованих методичних кейсів у контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини*. 2021. № 2. С. 137–149. DOI: https://doi.org/10.31499/2307-4906.2.2021.236672.
4. Мітельман І. М. Формування навичок знаходження найбільших значень функцій трьох змінних під час розв'язування деяких олімпіадних задач. *Збірник наукових праць Сумського державного педагогічного університету «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*. 2022. Вип. 2(20). С. 64–74. DOI: 10.5281/zenodo.7426573.
5. Мітельман І. М. Оцінювання деяких виразів з модулем числа під час розв'язування задач з параметрами в дидактичному контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Академічні візії*. 2023. Вип. 20. (Електронне фахове видання). DOI: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614 (дата звернення: 01.01.2024).
6. Радченко Д. В. Доведення нерівностей методом розкладу в суму квадратів. *У світі математики*. 2009. №1(15). С. 39–48.
7. Семенець С. П. Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів. Математика в рідній школі. 2016. № 4. С. 14–18.
8. Ясінський В. А. Новітні технології доведення нерівностей многочленів з трьома змінними. Математика в школі. 2006. № 8. С. 26–32.
9. Cîrtoaje Vasile Mathematical inequalities. Vol. 1: Symmetric polynomial inequalities. Vol. 2: Symmetric rational and nonrational inequalities. Ploiesti : Lambert Academic Publishing. 2021.
10. Manfrino Radmila B., Ortega José A. G., Delgado Rogelio V. Inequalities. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. México : Instituto de Matemáticas de UNAM. 2005.
11. Tung Nguyen Duy, Zhe Zhou Yuan *The interesting around technical analysis three variable inequalities.* [E-resource – file Inequality(Messi-Red3).pdf]. URL: https://www.mediafire.com/file/9yhn8sq5b8tvx3v/Inequality%2528Messi-Red3%2529.pdf/file (дата звернення: 01.01.2024).
12. Tran Phuong Diamonds in mathematical inequalities. Ha Noi : Hanoi Publishing House. 2007.
13. Vornicu Valentin Mathematical Olimpiad. Zalău : GIL Publishing House. 2003.
14. Vostokov Sergei, Teleucă Marcel, Pupăzan Gheorghe A technique in solving symmetric inequalities. *Materialele Conferinţei Ştiinţifice Internaţionale «Învăţământul de performanţă la disciplinele din ariile curriculare Ştiinţe exacte şi Ştiinţe ale naturii. Obiective. Strategii. Perspective»* (Chișinău, STU, Septembrie 25–28, 2014). 2015. Vol. II. P. 190–196.