СКАФФОЛДИНГ ЯК ІНСТРУМЕНТ ВИПЕРЕДЖАЛЬНОГО НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ УСКЛАДНЕНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ ТА ЙОГО ДИДАКТИКО-МЕТОДИЧНОГО СУПРОВОДУ

SCAFFOLDING AS A TOOL FOR ACCELERATED LEARNING TO SOLVE ADVANCED GEOMETRIC PROBLEMS BY THE COORDINATE METHOD AND ITS DIDACTIC AND METHODICAL SUPPORT

УДК 37.026:[378.046.4+378.147]::[373.5.016:51]
DOI https://doi.org/10.32782/2663-6085/2024/74.5

Задоріна О.М.,
канд. пед. наук, доцент,
доцент кафедри математики
та методики її навчання
Державного закладу
«Південноукраїнський національний
педагогічний університет
імені К.Д. Ушинського»

Мітельман І.М.,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри методики викладання
і змісту освіти
Комунального закладу вищої освіти
«Одеська академія неперервної освіти
Одеської обласної ради»

Моторіна В.Г.,
докт. пед. наук, професор,
професор кафедри математики
та методики її навчання
Державного закладу
«Південноукраїнський національний
педагогічний університет
імені К.Д. Ушинського»

Папач О.І.,
канд. пед. наук, доцент,
ст. викладач кафедри математики
та методики її навчання
Державного закладу
«Південноукраїнський національний
педагогічний університет
імені К.Д. Ушинського»

Статтю присвячено особливостям і перспективам використання стратегії скаффолдингу (англ. scaffolding – будівельні риштування) для вирішення комплексних проблем навчання математики в умовах Нової української школи й поступового переходу до профільної старшої школи, роботи з учнями з підвищеними математичними потребами, підготовки вчителя математики в педагогічних університетах та післядипломної (неперервної) освіти вчителів.
Автори доводять ефективність цього інструменту в сфері педагогіки математики з урахуванням сучасних підходів до структури фахових компетентностей учителя, до формування їх прототипів у студентів-математиків, а також і вимог щодо фундаменталізації та професіоналізації освіти. У роботі розглядається можливість інтеграції методів Case study й скаффолдингу, координація їхніх операційних компонентів, визначаються фактори синергії та взаємозбагачення цих освітніх технологій.
В основі дослідження лежать ідеї створення продуктивних згорнутих асоціацій та згорнутих структур мислення, розвивальної наступності, формувальної задачної природи цілісності навчально-математичної діяльності, синхронізації зон найближчого математичного розвитку різних категорій здобувачів освіти (неперервної освіти) й відповідних зон предметно-методичного компетентнісного розвитку вчителя / майбутнього вчителя.
У статті як приклад реалізації концепції авторів розгортається апробований предметно-методичний кейс мотивуючого випереджального покрокового деталізованого навчання-інструктування розв'язування деяких ускладнених і олімпіадних геометричних задач методом координат у 8–9 класах, у межах якого описуються певні прийоми моделювання фрагментів дидактичних комплексів у логіці методичного супроводу за технологією скаффолдингу. При цьому увага звертається не лише на активну й інтерактивну залученість учнів, студентів, слухачів курсів підвищення кваліфікації, а й на коректну інтерналізацію (своєчасне обґрунтоване зняття тимчасової опори – дидактичних «риштувань»).
Серед актуальних напрямів подальших досліджень виділяється вивчення теоретичних принципів і практичних прийомів скаффолдингу (включаючи і створення різноманітних тематичних дидактичних комплексів), наукова оцінка його потенціалу, переваг і вад саме в галузі навчання математики та методики її викладання – для продуктивного розвитку математичної компетентності учнів різного рівня підготовки й здібностей, предметно-методичної компетентності майбутніх і практикуючих учителів.

Ключові слова: *скаффолдинг, кейс-метод, підвищення кваліфікації вчителів математики, підготовка майбутніх учителів, методика навчання математики, фундаменталізація змісту освіти, профілізація в Новій українській школі, випереджальне навчання, ускладнені задачі з геометрії, метод координат.*

The article is devoted to the specifics and perspectives of using the scaffolding strategy to solve complicated problems of teaching mathematics in the New Ukrainian School and the staged transition to a profile high school, work with students with higher maths requirements, preparation of mathematics teachers in pedagogical universities and postgraduate (in-service) education of teachers.
The authors demonstrate the effectiveness of this tool in the field of mathematics pedagogy, in line with current approaches to the structure of teacher professional competences, the formation of their prototypes for mathematics students, and also the necessity of fundamentalization and professionalisation in education. The paper considers the possibility of integrating Case study and scaffolding methods, coordination of their operational components, and identifies the factors of synergy and mutual enrichment of such educational technologies.
The study is based on the ideas of creating productive convoluted associations and convoluted structures of thinking, developing continuity, formative task nature of the integrity of educational and mathematical activity, synchronisation of zones of the nearest mathematical development of different categories of applicants for education (in-service education) and the corresponding zones of subject-methodological competence development of the teacher / future teacher.
As an example of the implementation of the authors' concept, the article presents a validated subject-methodical case of motivating accelerated stepwise detailed training-instruction in solving some advanced and olympiad geometric problems by the coordinate method for grades 8–9, which describes some methods of modelling fragments of didactic complexes in the logic of scaffolding technology for methodological support. Thus, the attention is focused not only on the active and interactive involvement of pupils, students, or teachers training courses participants, but also on the right internalisation (well-timed and reasonable removal of the temporary support – didactic scaffolding).
Study of theoretical principles and practical techniques of scaffolding (including the creation of various thematic didactic complexes) is noted as one of the relevant areas for further research. It is important to scientific evaluate its potential, advantages and flaws in the field of mathematics education and teaching methods in order to productively develop the mathematical competence of students of differ-

ent levels of skills and abilities, as well as the subject-methodological competence of future and practicing teachers.
Key words: *scaffolding, Case study method, professional development of maths teachers, training of future teachers, mathematics teaching methodology, fundamentalization of education content, profiling at the New Ukrainian School, accelerated learning, advanced geometric problems, coordinate method.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. Актуальність проблем формування й розвитку компетентнісного профілю як майбутнього, так і працюючого вчителя математики, визначається динамікою змін вимог держави й суспільства щодо ефективності всіх рівнів загальної середньої освіти та нормативно закріплюється в Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року, схваленої розпорядженням Кабінету Міністрів України від 14 грудня 2016 року № 988-р, та, відповідно, у Професійному стандарті за професіями «Вчитель початкових класів закладу загальної середньої освіти», «Вчитель закладу загальної середньої освіти», «Вчитель з початкової освіти (з дипломом молодшого спеціаліста)» затвердженому наказом Міністерства розвитку економіки, торгівлі та сільського господарства від 24 грудня 2020 року № 2736 (*далі – Професійний стандарт*). Тривалий час якість вищої педагогічної освіти та післядипломної (неперервної) освіти вимірювалась обсягом опрацьованого та засвоєного навчального матеріалу, кількістю прочитаних курсів. Такий підхід був притаманним системі установок «процес-продукт» (N. I. Gage), а E. G. Begle в аналізі досліджень математичних знань учителів підкреслював, що такі дослідження зосереджувались навколо *знаннєвої освітньої парадигми* (наявного обсягу знань учителя та його знаннєвих потреб), що було близьким також і до *технократичної парадигми*, хоча, вважаємо, з точки зору продуктивності більш доречною є характеризація цього періоду терміном «*missing paradigm*» (L. S. Shulman). На сучасному ринку праці затребуваними стали спеціалісти із сформованими компетентностями, які передбачають операціональність, готовність і здатність використовувати набуті знання, уміння й навички, і вже понад як 30 років концепція компетентнісно-орієнтованої освіти в багатьох країнах є фундаментом кваліфікаційних стандартів, у першу чергу саме в педагогічній галузі. Завдання дослідження якості знань учителів (майбутніх учителів) стали більш зорієнтованими на *зміст навчання* та вивчення *нових способів отримання знань* [31]. Як зазначав С. Клепко, відбулась трансформація філософії *освіти* у філософію *управління знаннями* [9, с. 15]. Становлення та загальні закономірності компетентнісного підходу в українській освіті докладно розглядаються в дослідженнях багатьох вітчизняних науковців (І. Бабіна, П. Бачинський, Н. Бібік, Л. Ващенко, Е. Воронцова, Г. Гаврищак, І. Гудзик, І. Зязюн, Я. Кодлюк, В. Кремінь, С. Ніколаєнко, О. Пометун, Л. Пуховська, О. Савченко, О. Ситник, Т. Смагіна, Г. Терещук, Н. Фоменко та ін.).

Роль математики як навчальної дисципліни, яка лежить в основі мисленнєвого становлення учнів і пізнання ними навколишнього світу науковими методами та забезпечує прогрес держави й суспільства, відображена у Плані заходів щодо популяризації природничих наук та математики до 2025 року, затвердженому розпорядженням Кабінету Міністрів України від 14 квітня 2021 року № 320-р. Державні стандарти рівнів повної загальної середньої освіти включають математичну компетентність до переліку ключових компетентностей здобувачів освіти, до того ж – математика є обов'язковою дисципліною для складання зовнішнього незалежного оцінювання (Національного мультипредметного тесту), що визначає подальшу освітню траєкторію випускників закладів загальної середньої освіти.

Під час реформування української освітньої галузі – як і для інших навчальних дисциплін – докорінно змінюється філософія навчання математики, зокрема – у *предметно-методичному* сегменті **А2** структури компетентностей, передбачених Професійним стандартом. Отже, норми Професійного стандарту переконливо орієнтують на те, що дослідження й розвинення дидактико-методичних технологій, стратегій, практик та інструментів у сфері педагогіки математики повинні ґрунтуватись на розумінні комплексної сутності компетентнісного підходу – нерозривної єдності *спеціалізованої математичної* (предметної) компетентності та *методичної* компетентності.

Зазначимо, що С. Раков визначав математичну (спеціалізовану) компетентність через рівні навчальних досягнень, для яких найбільш суттєвим є набуття сукупності математичних умінь [20]. У підходах І. Зіненко [7] та М. Головань [3] важливим для професійної математичної освіти є виділення досвіду власної *математичної діяльності*, причому у статті [3] наголошується, що структурні компоненти математичної компетентності не можуть існувати й розглядатись відокремлено один від одного, а лише в їх тісній взаємодії. У роботі [34] K. Lesseig досліджувала природу *математичної діяльності* вчителів з точки зору розуміння вчителями задач на доведення, що має вагоме значення для навчання (методики навчання) розв'язування задач підвищеної та олімпіадної складності, бо в таких задачах (навіть якщо умова в явному вигляді не передбачає доведення) суттєву роль відіграють обґрунтування проміжних етапів і логічних кроків.

Технології компетентнісного підходу до підготовки та підвищення кваліфікації (*далі – ПК*) вчителів математики, структура предметно-методичної компетентності вчителів математики й майбутніх учителів математики, рівень її сформованості всебічно розглядались і уточнювались у роботах українських учених І. Акуленко, М. Бирки, А. Воєводи, Т. Годованюк, О. Задоріної, О. Матяш, Л. Михайленко, І. Мітельмана, В. Моторіної, К. Недялкової, О. Папач, С. Семенця, С. Скворцової, З. Слєпкань, Н. Тарасенкової, О. Чашечникової, В. Швеця та ін. Так, С. Скворцова, аналізуючи структуру, функціонал і потенціал методичної (предметно-методичної) компетентності вчителя, виділила в ній низку підпорядкованих визначальних складників: нормативну, варіативну, спеціально-методичну, контрольно-оцінювальну, проєктувально-моделювальну та технологічну компетентності [26].

Національна доктрина розвитку освіти, затверджена Указом Президента України від 17.04.2002 № 347/2002, визначає обов'язковою умовою модернізації системи освіти на основі її *фундаменталізації*. Фундаменталізацію освіти проголошено одним з пріоритетів Болонського процесу (спеціальний меморандум ЮНЕСКО, 1994 р.). Видатний український методолог педагогічної науки С. Гончаренко зазначав, що освіта має фундаментальний характер, якщо вона втілює процес такої взаємодії людини з інтелектуальним середовищем, що особистість сприймає освіту як джерело збагачення власного внутрішнього світу і, завдяки цьому, визріває для примноження потенціалу самого середовища [4; 5]. На думку С. Гончаренка, М. Ковтонюк, Г. Васьківської та ін. принцип фундаменталізації освітнього процесу слід вважати універсальною дидактичною категорією, на якій базується сучасна освіта. С. Гончаренко підкреслював також, що основним завданням фундаментальної освіти є створення оптимального середовища для виховання гнучкого багатогранного мислення, освоєння наукової інформаційної бази й сучасної методології осмислення дійсності, формування внутрішньої потреби в саморозвитку та самоосвіті протягом усього життя людини [5].

Фундаменталізація освіти нерозривно пов'язана з обсягом наукових знань у контексті її *професіоналізації*. Професіоналізацію освіти варто розглядати як з точки зору забезпечення належного рівня підготовки майбутніх учителів математиків та їх подальшої неперервної освіти [6], так і з позицій розвитку спеціалізованих математичних компетентностей в умовах профілізації старшої школи та подальшої професійної освітньої траєкторії учнів Нової української школи. Концепція Нової української школи передбачає обов'язкове впровадження профільного формату старшої школи, що потребує інноваційних стратегій «м'якої» профілізації, пропедевтики поглибленого вивчення в базовій школі, без чого повноцінна математична освіта в старших класах на профільному рівні не може бути реалізованою. Підкреслимо, що саме в базовій школі формується здатність давати вичерпні означення, формулювати теореми та проводити бездоганні математичні доведення, повноцінна культура математичних записів, використання складної символіки тощо. Особливою зоною відповідальності вчителя математики є неприпустимість розривів у змістових лініях курсу шкільної математики, поступове ускладнення задачного матеріалу, постійне збереження в «робочому» стані здобутих учнями знань і прийомів розв'язування задач. Діяльність учителя математики, який на різних етапах уроку може виступати як тьютор, модератор, коуч, фасилітатор, наповнюється новим технологічно-компетентнісним змістом. У посібнику В. Моторіної [19] систематизуються та розкриваються дидактико-методичні й технологічні аспекти та проблеми навчання математики в профільній школі на засадах компетентнісного підходу, де компетентність визначається через високий рівень володіння вчителем математики професійною діяльністю, здатність використовувати прийоми особистісного самовизначення та саморозвитку. Фахова компетентність учителя математики є базисом успішності освітнього процесу, а основу компетентнісного підходу В. Моторіна вбачає у пріоритеті фундаментальної підготовки майбутніх учителів, її системності і, як наслідок, у здатності працюючих педагогів до керування своєю неперервною (післядипломною) освітою.

Слід також відзначити дослідження з питань підготовки та професійного зростання вчителів математики, виконані зарубіжними науковцями H. Borko, C. Y. Charalambous, E. Dutro, S. Fernández, L. Figueiras, H. C. Hill, M. Hoover, G. Kaiser, M. Lampert, B. Schwarz.

Відтак, підготовка майбутніх учителів математики в закладах вищої педагогічної освіти та підвищення кваліфікації працюючих учителів у закладах післядипломної освіти в контексті викладеного вище значною мірою концентрується на таких завданнях, як: *а*) реалізація особистісно орієнтованого, компетентнісного та діяльнісного підходів на уроках; *б*) опанування нових ролей та функціоналу вчителя; *в*) розвинення й трансформація предметно-методичних компетентностей загального та спеціалізованого характеру; *г*) актуалізація сучасних технологій навчання на основі рівневої диференціації. Вирішення цих складних проблем сучасної математичної освіти вимагає створення та постійного оновлення науково обґрунтованого інструментарію, ситуаційних дидактико-методичних технік та їх комбінування з перспективами емерджентної результативності.

Залежність рівня знань учнів від предметно-методичних компетентностей учителя досліджували наприкінці 80-х та на початку 90-х рр. XX століття, зокрема, C. W. Anderson, D. L. Ball, G. W. McDiarmid. У дослідженні [32] звертають увагу на те, що вчитель повинен постійно покращувати здатність генерувати доцільні пояснення (у тому числі й на «неформальному», евристичному рівні) навчального матеріалу на основі власного досвіду розв'язування задач та проведення математичних доведень і міркувань, аналізу прикладів (задач-моделей [2]).

Вважаємо, що релевантні практики роботи з ускладненим задачним матеріалом неодмінно мають знаходитись у фокусі фундаменталізації та профілізації математичної освіти. Серед дієвих інструментів і технологій дидактико-методичного супроводу навчання і педагогічної взаємодії учнів і вчителів у різних предметних галузях та освітніх форматах науковці відзначають стратегію *скаффолдингу* (англ. *scaffolding* – будівельні риштування). Суто «інженерне» поняття стало джерелом конструктивної метафоричної аналогії, що набула педагогічного змісту для відображення динаміки суб'єктно-суб'єктної та суб'єктно-об'єктної взаємодії під час розв'язування навчальних завдань (з якими в повному обсязі здобувачі освіти самостійно впоратись не зможуть) з точки зору контрольованого коректування міри підтримки з боку викладача. Сучасні дослідники ставляться до скаффолдингу не лише з традиційних позицій щодо систематичної класичної методики навчання, спрямованої на активну й інтерактивну залученість учня, студента, слухача курсів підвищення кваліфікації (*далі – КПК*) вчителів в освітній процес за допомогою покрокової підтримки та структурування завдань, уроків-драйверів, задач-моделей, блок-схем, допоміжних запитань, рекомендацій тощо. Визначальною рисою стратегії скаффолдингу вважається ідея тимчасової опори, «згасаючої допомоги» (fading help), яка на початку опрацювання завдання може бути дуже інтенсивною, а ближче до досягнення поставленої мети значно зменшується чи взагалі зникає (йдеться про так звану *інтерналізацію* – коли зовнішні «риштування» поступово знімаються, якщо здобувачі освіти засвоюють модель виконання завдання і спроможні працювати над ним самостійно [28]).

Концепцію й ключові принципи скаффолдингу в 1976 р. сформулювали американські психологи D. Wood, D. Bruner і G. Ross [36] для дослідження закономірностей навчання дітей дошкільного віку, але з часом вона набула ознак універсальності та була розповсюджена на повну «лінійку» освітніх форматів: від дошкільної освіти й шкільної освіти всіх рівнів до післядипломної освіти (освіти дорослих), ПК тощо. Зазначимо, що відправною точкою розробки технології скаффолдингу була орієнтація на індивідуальну роботу, взаємодію дітей з дорослими, проте реальні педагогічні практики зсунули акценти на потреби врахування рівня можливостей кожного здобувача освіти в складі досить чисельної групи, на конструювання гнучких допоміжних елементів педагогічного риштування.

Засвоєння математичних знань є абсолютно неможливим без такої парадигми процесу «навчання-вчення», в якому «учні активно створюють розуміння впродовж того, як вони приймають усе більш суттєву участь у відтворенні сталих математичних практик» [35, с. 21]. Отже, функція викладача математики (методики навчання математики) мусить змінитись з пасивного формату «показ і розповідь» на оперативне керівництво процесами мислення, таку підтримку мисленнєвих побудов слухачів, яка розвиває індивідуальне мислення, навички групової інтелектуальної комунікації, призводить до обґрунтованого математичного розуміння на основі аналізу, синтезу, дедуктивних та індуктивних схем мислення. Отже, розробка прикладів застосування скаффолдингу для навчання математики та / або методики її викладання повинна стати важливим і перспективним простором наукових розвідок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Упродовж тривалого часу фахівці досліджують скаффолдинг не лише як стратегію психологічного супроводу процесу виконання завдань, що спочатку виходять за межі можливостей дитини, але і як повноцінний дидактико-методичний інструмент продуктивного навчання й інструктування.

В Україні наукові розвідки щодо скаффолдингу здебільшого відносяться до теорії та практики мовної освіти, сфери навчання дітей з особливими освітніми потребами. Серед робіт останніх 5 років є чимало таких, що свідчать про підвищення уваги українських учених до вивчення педагогічного скаффолдингу. О. Фідкевич та В. Снєгірьова (2023 р.) обґрунтовували значення скаффолдингу як інтерактивної технології в реалізації моделі багатомовної освіти. О. Устименко (2021 р.) розглядала застосування скаффолдингу під час навчання іноземних мов у середній школі та закладах вищої освіти в поєднанні з методом проєктів. О. Маркова і Т. Шматюк (2022 р.) приділили увагу впливу навчального скаффолдингу на створення ситуацій успіху на заняттях з англійської мови зі студентами. Н. Герцовська і К. Фозекош (2021 р.) акцентували увагу на комунікативному значенні скаффолдингу під час самостійної роботи студентів з вивчення іноземної мови. Про використання скаффолдингу у корекційно-розвивальній роботі в освітньому просторі з дітьми з інтелектуальними порушеннями писала Г. Блеч (2019 р.). В. Павлюх доводила переваги скаффолдингу для мотивації та орієнтації учнів на результативність в умовах інклюзивного навчання – через позитивну підтримку вчителя (2022 р.).

Досягнення українських дослідників з вивчення скаффолдингу дозволяють робити перспективні кроки в напряму його системного застосування в певних предметних галузях та освітніх сферах. Водночас слід зауважити, що основні результати і практичні розробки, котрі стосуються скаффолдингу в дидактиці та методиці математики, містяться, усе ж таки, у роботах іноземних учених, а у вітчизняній освітній практиці навчання математики, підготовки майбутніх учителів математики, підвищення кваліфікації працюючих вчителів застосування й дослідження скаффолдингу знаходиться на початковій стадії.

Серед зарубіжних розвідок виділимо роботу J. Anghileri [30], в якій авторка охарактеризувала три рівні практики зведення риштувань для забезпечення якості математичної освіти. Риштування першого рівня формуються до взаємодії з учнями і включають у себе різноманітні «артефакти» та «маніпулятори», а також заходи щодо організації класу. Вони не передбачають прямої взаємодії між учителем та учнями, але можуть включати емоційний зворотний зв’язок, який не має безпосереднього відношення до математики, зауваження й дії, спрямовані на привернення уваги, заохочення й демонстрацію схвалення. Риштування другого рівня включають пряму взаємодію між учителем та учнями, яка безпосередньо стосується математичного змісту. Їх створення складається з традиційних практик (показ та розповідь), в яких у дискусії домінує вчитель і обмежено використовуються внески учнів. Побудова таких риштувань включає «перевірку та реструктуризацію» й допомагає підтримувати в учнів їх власне розуміння математики. Створення риштувань на третьому рівні пов’язується із розробкою учнями підходів завдяки таким спеціалізованим процесам, як узагальнення, екстраполяція й абстракція. На цьому рівні рушійними силами визнаються взаємодія й дискурс навчального характеру, спрямовані на розвиток концептуального мислення і репрезентаційних інструментів.

A. Bakker, J. Smit, R. Wegerif досліджували ефективність застосування скаффолдингу в діалогічному навчанні математики. Досвід використання скаффолдинга для учнів з низькими досягненнями з математики описується в публікаціях O. Broza, Y. Ben, D. Kolikant. Інтеграцію елементів скаффолдингу в практику викладання математики в початковій школі задля стимулювання пізнавальної самостійності у відповідності з індивідуальними зонами найближчого розвитку вивчали K. Makar, A. Bakker, D. Ben, M. Amir, A. Farida, N. Fediyanto та інші. У роботі S. Kazak, R. Wegerif, T. Fujita [33] було підтверджено доцільність використання на уроках математики скаффолдингу в навчальних діалогах для більш успішного сприйняти ймовірнісних міркувань, і зміст такого дослідження є, з нашої точки зору, актуальним для 5–6 класів української базової школи.

Кейс-технології (на основі ситуаційного аналізу) в педагогічній практиці є предметом усебічних досліджень багатьох українських спеціалістів уже понад 30 років. Оскільки в запропонованій статті аналізується інтерактивний ресурс поєднання кейс-методик зі стратегією скаффолдингу, то варто додатково звернути увагу на публікації Т. Пащенко про кейс-метод як сучасну технологію навчання спеціальних дисциплін, С. Лавінди щодо формування професійно-комунікативної компетентності майбутніх інженерів. Такі науковці, як О. Гречановська, Т. Манглієва, Н. Семченко, О. Холодова, також займались дослідженнями кейс-методик у вищій школі, а О. Шаманська вивчала їх у контексті перспектив розвитку освіти дорослих в Україні.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Застосування стратегії та технології скаффолдингу має спиратись на якісний об’єктивований дидактико-методичний ресурс у вигляді евристично-орієнтованих комплексів, які можуть розгортатись у керований «струм» актуалізації опорних знань, виділення предметно-методичних особливостей завдання, підказок та рекомендацій різного рівня докладності. Аналіз фахової літератури показує, що значення й потенціал скаффолдингу саме в царині навчання математики та методики її викладання практично не розкривається, особливо якщо йдеться про наскрізні способи організації, взаємодії та наповнення таких *сегментів* компетентнісних сфер студента – майбутнього вчителя математики й працюючого вчителя, як-то: *навчальний / академічний*, *квазіпрофесійний* (для студентів) чи *agile-професійний* (для вчителів), *навчально-професійний*, *результуючий* [6; 24; 25]. Тобто в теорії математичної освіти скаффолдинг ще не посів належного місця серед виокремлених дидактико-методичних категорій, педагогічних інструментів (стратегій, технік), підкріплених релевантними прикладами, науково-методичними рекомендаціями, значно поступаючись більш традиційним підходам програмованого навчання (спільні риси з яким він, безумовно, має).

Сьогодні спостерігається недоречне методичне «розфокусування» з питань застосування аналітичних методів в елементарній геометрії, що на системному рівні негативно впливає на координацію та інтеграцію всіх змістових ліній шкільного курсу математики («Числа і вирази», «Рівняння і нерівності», «Функції», «Геометричні фігури», «Геометричні величини»). Хоча, зазначимо, відповідні розділи позиціонуються програмами математичних спеціальностей закладів вищої педагогічної освіти, програмами КПК, шкільними програмами тощо. Важливо, що українська вчена З. Слєпкань у системі середньої математичної освіти серед основних евристичних схем (правил-орієнтирів) називає координатний і векторний методи [21; 23].

З точки зору викладання на профільному (поглибленому) рівні в Новій українській школі, роботи з учнями з підвищеними математичними освітніми потребами *контекстне навчання* в системі вищої педагогічної математичної освіти, післядипломної освіти (ПК) вчителів математики [6] вимагає розширення методичної бази та обсягів задачної конкретизації (адаптації) цієї тематики в парадигмі скаффолдингу, що, за нашою гіпотезою, дозволить покращити ситуацію.

Мета статті. Стаття ставить за мету – з дотриманням принципів фундаменталізації та професіоналізації освіти – продовження розробок і впровадження в навчання школярів, у практику роботи зі студентами математичних спеціальностей закладів вищої педагогічної освіти та слухачами системи післядипломної освіти предметно-методичних блоків ускладнених та олімпіадних задач різної тематики й типології, які можуть бути оперативно використані або як прототипи робочих продуктів, або як робочі продукти в сенсі agile-технологій XP і ATML [16–18]. Для деяких задач, які допускають координатні методи розв'язування, у даній роботі пропонуються приклади та описуються прийоми трансферу моделювання фрагментів дидактичних комплексів, методичних кейсів, інших *продуктів* у напрямі форматів методичного супроводу за технологією скаффолдингу.

Виклад основного матеріалу. За висновками О. Матяш, *система* спеціалізованих геометрично-методичних компетентностей (*учителя / майбутнього вчителя*) є інтегрованою готовністю і здатністю, що складаються із геометричних знань й умінь, досвіду, цінностей і ставлень, спроможності ефективно використовувати різні технології навчання, оптимально добирати засоби навчання для вивчення теми, забезпечувати розвиток прийомів розумової предметної діяльності здобувачів освіти, творчо вирішувати проблеми методичного характеру [13, с. 86, с. 124]. Ми пропонуємо розвинення техніки скаффолдингу першочергово для конвергенції і трансформації наявних специфічних теоретичних і практичних підходів до генезису фахових компетентностей на платформі спеціалізації *кейс-методик* (ситуаційної методичної техніки), спрямованих на створення продуктивних згорнутих асоціацій та згорнутих структур мислення [14], на педагогічне стимулювання досягнення закріпленого освітнього результату для студентів і вчителів та «похідного» результату для академічно обдарованих учнів (які вивчають математику поглиблено, беруть участь у математичних змаганнях різних рівнів і типів). Предметно-методичний контент слід послідовно розглядати з точки зору формування продуктивних дидактичних структур з урахуванням ознак *гнучкості*, *різнорівневої диференціації*, *алгоритмічності* та *структурної впізнаваності*. У роботах [15], [6] розглядається закріплення в системі навчання студентів закладів вищої педагогічної освіти, у практиці ПК працюючих учителів, у налаштуванні підготовки майбутніх учителів до інтеграції в систему післядипломної педагогічної освіти таких збалансованих динамічних механізмів, які змінюють значущість і функції кейс-методу, позбавляючи його рис проміжної організаційної форми (в трактовці роботи [27]). Ми також погоджуємось з висновками С. Ковальової про те, що робота з кейсами дозволяє у професійній підготовці вчителя більш ефективно поєднувати теоретичний матеріал з практичними завданнями, розвиваючи у студентів самостійність мислення, і є вагомим внеском до підвищення рівня майбутньої педагогічної діяльності [10]. У подальший розвиток цих ідей у співпраці кафедри методики викладання і змісту освіти Одеської академії неперервної освіти та викладачів Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського запропоновано координацію операційно-технологічних компонентів кейс-методик та скаффолдингу в проєкції на потреби освітньої траєкторії ключових стейкхолдерів педагогіки математики – учнів Нової української школи.

Загальною передумовою концепції скаффолдингу вважається класична психологічна теорія «зон найближчого розвитку», на що вказують, зокрема, О. Фідкевич і В. Снєгірьова [28]. В основу синергетичного поєднання кейс-методики та педагогічного скаффолдингу в сфері математичної освіти ми покладаємо генезис і перенесення тези С. Семенця про принципи розвивальної наступності (за яким кожен наступний тип задач вирізняється від попереднього вищим рівнем змістового теоретичного узагальнення), формувальну задачну природу цілісності навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів на рівень синхронізації *зон найближчого математичного розвитку різних категорій здобувачів освіти (неперервної освіти)* й відповідних *зон фахового предметно-методичного компетентнісного розвитку вчителя / майбутнього вчителя*) [16; 18; 22].

Відомо, що кейс-технології у навчанні математики в першу чергу відповідають комплексу методів ситуаційного аналізу конкретних випадків, реальних чи імітованих проблем практичного характеру, які передбачається вирішити за допомогою засобів математики. Але нас цікавить інтерпретація кейс-технологій, їхній інтерактивний потенціал (метод інциденту, ігрове проєктування, метод ситуаційно-рольових ігор, метод дискусій та ін.) для завдань, пов'язаних з особливостями викладання певних розділів програми з математики. Систематизовані В. Ягодніковою [29] навчальні завдання кейс-методу, його виховний потенціал, алгоритми проведення занять (див. також [1; 8; 11]), вимоги щодо створення спеціальних умов для кейс-технологій указують на перспективність поєднання цінностей *Case study* з технологією педагогічного скаффолдингу. Технологія скаффолдингу збагачується широким спектром інтерактивних прийомів кейс-методу, засобами створення атмосфери психологічного комфорту, прийомами роботи *в групах* і роботи викладача-модератора *з групами*, розвитком вольових якостей, цілеспрямованості, навичок сучасної комунікативної культури. Натомість кейс-технології отримують від скаффолдингу вимоги чіткої деталізації навчального (навчально-методичного) завдання, розділення на кроки, визначення для кожного кроку рівня й обсягу можливої допомоги (який не завадить власному внеску учнів, студентів, слухачів КПК), коректне визначення моментів зняття «риштування» (щоб протидіяти гальмуванню процесу роботи над кейсом чи завданням. Оскільки скаффолдинг більшістю дослідників розглядається як індивідуальний інструмент навчання, то поєднання кейс-технологій з технологією скаффолдингу врівноважить груповий (колективний) та індивідуальний формати організації освітнього процесу.

Розглянемо приклад розгортання одного з предметно-методичних кейсів в логіці скаффолдингу. Такі кейси мають «подвійне» призначення. Для безпосередньої роботи з учнями вони дають певні алгоритми, операційні кліше побудови навчальних занять, а в підготовці майбутнього вчителя, підвищенні кваліфікації працюючого вчителя – привчають до «преломлення» змісту університетських математичних курсів крізь призму реальних педагогічних потреб, сприяють формуванню й розвитку фахових компетентностей (та їх прототипів), навчають створювати аналогічні дидактико-методичні продукти.

Як відомо, чинні навчальні програми (у тому числі й для поглибленого вивчення математики) передбачають систематичне ознайомлення з векторно-координатною інтерпретацією та реалізацією планіметрії лише в 9 класі. Проте вчителі-практики під час проходження КПК постійно наполегливо звертають увагу на доцільність більш раннього (у 8 класі) *випереджального* моделювання прототипів аналітичних методів у геометрії, що дозволить розширити практичні можливості здібних учнів у розв'язуванні ускладнених і навіть олімпіадних задач. На такі потреби обов'язково мають відкликатись не лише викладачі методичних дисциплін, але й викладачі університетського курсу аналітичної геометрії для майбутніх учителів математики. Найбільш виразними та значущими геометричними категоріями перших етапів вивчення планіметрії є категорії паралельності та перпендикулярності прямих. Ми вважаємо, що перенесення змісту (умови) деяких геометричних задач на координатну площину, *сприйняття* прямої (непаралельної осі ординат) як графіка лінійної функції $y = kx + b$ (компонента програми з алгебри для 7 класу) задовго до вивчення в 9 класі рівняння прямої (в різних формах) як об'єкта геометричної теми «Декартові координати на площині» **може** й **мусить** після наполегливих зусиль учителя стати методично закріпленим результатом (*неформалізованим* знаннєвим продуктом) ще в учнів 8 класу (можливо, у форматі позакласних занять, виконання учнівських навчальних проєктів) – принаймні для найбільш допитливих і здібних. Зокрема, розуміння геометричного змісту умови $b = 0$, уміння в різні способи знаходити коефіцієнти k і b за координатами двох точок $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, що належать графіку лінійної функції (особливу увагу рекомендується приділити формулі $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$), уміння знаходити b, якщо є відомим кутовий коефіцієнт k і координати якоїсь точки графіка, уміння знаходити точки перетину графіків лінійних функцій (як різновиду задач на розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними), розуміння зв'язку паралельності прямих – графіків лінійних функцій $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, – з рівністю коефіцієнтів k_1 і k_2 тощо. Практика доводить, що учні 8 класу в «поточному» режимі зон пропедевтики найближчого розвитку (без виділення в окрему велику тему, яка буде вивчатись у 9 класі) можуть усвідомлювати та застосовувати і формули для координат середини відрізка, і формулу для знаходження відстані між точками на координатних осях. До того ж, це стимулює і більш творче ставлення до вивчення лінійних функцій як повноцінного геометричного інструментарію.

Завдання предметно-методичного кейса. Моделювання та впровадження в практику вивчення та викладання геометрії у 8 класі на основі названих вище алгебраїчних ресурсів і теореми Піфагора (*прямої* та *оберненої*) важливого випереджального елемента – необхідної й достатньої умови перпендикулярності графіків лінійних функцій $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$. (Програмний статус твердження, оберненого до теореми Піфагора, є, на жаль, невизначеним у 8 класі, але вчителі, не чекаючи вивчення в 9 класі теореми косинусів, традиційно намагаються розглядати його хоча б як ключову задачу, доповнюючи – якщо це необхідно – зміст підручника, що використовується.)

Підкреслимо, що предметно-методичний кейс такого ґатунку доцільно реалізовувати в роботі з учнями наприкінці вивчення курсу геометрії 8 класу, причому попередньо слід у режимі розширеного повторення звернутись до теми «Лінійна функція та її графік». Звернемо увагу на те, що програма з алгебри 7 класу знайомить школярів з лінійним рівнянням *ax* + *by* з двома змінними *x* і *y*, його графіком (учні навчаються аналізувати вигляд і особливості розташування графіка, переходити – у випадку $b \neq 0$ – до графіка лінійної функції), системами лінійних рівнянь і різними методами їх розв'язування, розв'язуванням текстових задач за допомогою систем лінійних рівнянь. Учителі-практики справедливо відзначають затруднення, з якими стикаються семикласники під час абстрактного оперування зі співвідношеннями вигляду $ax + by = c$ (конкретні ситуації, пов'язані з розв'язуванням систем, проблем зазвичай не створюють). До того ж, у контексті нашої геометричної мети намагання фактично задіювати загальне рівняння прямої не дає жодних переваг на рівні 8 класу, і тому достатньо зосередитись на більш зрозумілому для учнів об'єкті – лінійній функції.

Розглянемо основні етапи застосування скаффолдингу в двох аспектах: для роботи з учнями 8 класу та для роботи з учителями / майбутніми вчителями. Вважаємо, що і на заняттях зі студентами, і з учителями на КПК слід стисло розбирати учнівську реалізацію.

Привертання уваги та цілепокладання. Ретельне планування актуалізації та систематизації раніше вивченого матеріалу (див. вище) і набутого досвіду з елементами нових ідей і фактів, відпрацювання на достатній кількості «числових» прикладів з побудовою, вимірюванням. Учитель повинен урахувати освітні потреби і можливості кожного учня для імплементації спільної мети координованої навчальної діяльності учнів і педагога. Ми маємо обґрунтувати доцільність уміння виражати паралельність і перпендикулярність прямих, колінеарність точок, конкурентність прямих різноманітними засобами математичної мови вже у 8 класі (деякі аспекти вартують уваги навіть у 7 класі, хоча відходити в перший рік вивчення геометрії від основної лінії її побудови навряд чи доцільно).

Для учнів 8 класу. Мотивація щодо перспектив «алгебраїзації» ускладнених та олімпіадних задач про взаємне розташування прямих. Виділення ознак очікуваної ефективності таких підходів.

Приклад базової мотивуючої нескладної олімпіадної задачі на колінеарність точок, яка також розбирається в ідеології скаффолдингу. Базові математичні задачі є елементами навчальної задачі, яку в цілому ставить перед собою процес навчання математики (на цю позицію українського психолога Г. Балла вказує С. Семенець [22]).

Задача (*IV етап Всеукраїнської олімпіади*, 2002 р.). Нехай *ABCD* є рівнобедреною трапецією, в якій *BC* – менша основа, точки *M* і *N* – середини сторін *AB* і *AD* відповідно, а відрізок *BP* – її висота. Позначимо через *Q* точку перетину відрізків *DM* і *BN*. Доведіть, що точки *P*, *Q* і *C* лежать на одній прямій (є *колінеарними*).

Спочатку пропонується розібрати традиційне *синтетичне* розв'язання, яке не використовує методи аналітичної геометрії [12].

Кроки розв'язання на основі сприйняття прямої як графіка лінійної функції можуть бути такими. (Для кожного кроку комбінуються частини, продемонстровані вчителем, зроблені учнями під керівництвом учителя, зроблені учнями у взаємодії між собою, і – обов'язково – зроблені кожним учнем самостійно, але з контролем результатів.)

а) Перенесення змісту (умови) задачі на координатну площину (вибір системи координат та параметризація задачі) – з обов'язковим обговоренням властивостей рівнобедреної трапеції.

Нехай $0 < p < a$. Тоді $A(-2a;\ 0)$, $B(-2p;\ 2)$, $C(-2p;\ 0)$, $N(0;\ 0)$, $M(-(a + p);\ 1)$ (рис. 1). Учитель роз'яснює зручність подвоєння відповідних параметрів і зосереджується на незнайомому для учнів 8 класу знаходженні координат точки *M* – середини відрізка *AB*. Зазначимо, що для спрощення й *обмеження кола необхідних дій* можна скористатись (принаймні для деяких учнів) «комфортними» для зображення на «клітчастому» папері й обчислення числовими даними.

б) Визначення лінійних функцій $y = -\frac{x-2a}{3a+p}$, $y = \frac{x}{2p} + 1$, $y = -\frac{x}{p}$, графіки яких збігаються, відповідно, з прямими *DM*, *CP* і *BN* (варто запропонувати після знаходження виразів, якими задаються лінійні функції, з метою самоконтроля обчислень і перетворень перевірити, чи задовольняють координати точок *D*, *M*, *B* і *N* ці рівняння). У деяких ситуаціях учитель може взагалі не зосереджуватись на технічному виведенні рівнянь (лише нагадати ідею розв'язування такого завдання), а обмежитись їх «пред'явленням» з перевіркою.

в) Останній крок містить неочевидний для восьмикласників логічний нюанс: можна знайти точку перетину будь-яких двох графіків і перевірити, чи належить вона третьому графіку. Задача

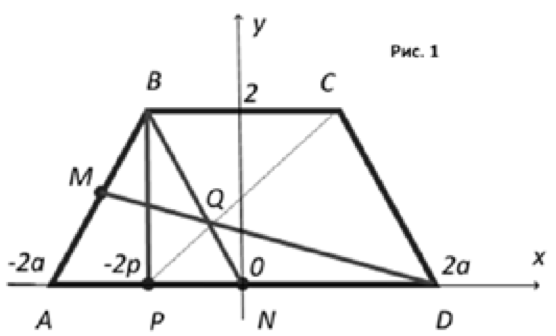

Рис. 1.

фактично полягає в доведенні конкурентності прямих *DM*, *BN* і *CP*. На цьому можна побудувати групову роботу над завершальною частиною розв'язування задачі.

Ми бачимо, що вибір даної мотивуючої задачі дозволяє вчителю заохотити восьмикласників до випереджального застосування частини програмного матеріалу 9 класу, адаптованого для 8 класу, звернути увагу на значущі деталі умови та розв'язання, забезпечити ефективний інтерсуб'єктний діалог (обмін ідеями, проміжними результатами між учнями, групами учнів, учителем тощо). Для учнів створюється зона конгнітивного комфорту, але при цьому, очевидно, запропоноване завдання учні спочатку не спроможні виконати самостійно. Поступово на індивідуальному та колективному рівні актуалізуються й трансформуються набуті раніше знання, прибираються «риштування», аби не закріплювалась абсолютна залежність від доступної допомоги вчителя та/або більш успішних однокласників. Відтак, в учнів 8 класу значно підвищується мотивація через відчуття позитивної самоефективності (див. також [28]): формується впевненість, що наявні в них компетентності можуть «тут і зараз» дозволити довести новий для них теоретичний факт про перпендикулярність графіків лінійних функцій.

Для вчителів / майбутніх учителів. Обговорення контурів адаптації методів аналітичної геометрії для ранньої пропедевтики на рівні 8 класу в умовах класичних систем побудови шкільного курсу геометрії. Для розібраного вище прикладу зі студентами та вчителями варто використати також і складання рівняння прямої *AB* у вигляді $(y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$.

Структуризація моделі виконання завдання (III–IV рівень ієрархічної задачної системи розвивального навчання математики за класифікацією роботи [22]). Діяльність учнів та вчителя фокусується на конкретній математичній меті кейса. Виконання завдання повинно сприяти організації мисленнєвої діяльності учнів, спрямованій *step by step* на досягнення запланованого результату: доведення нового для учнів 8 класу факту та пропедевтики нових навичок щодо розв'язування задач (навчально-теоретична і навчально-дослідницька зона математичного і предметно-методичного розвитку).

Для учнів 8 класу. Пропонуємо учням спочатку сформувати гіпотезу щодо критерію перпендикулярності графіків лінійних функцій. Для цього можна розглянути на «клітчастому» папері такі пари графіків: $y = x$ і $y = -x$; $y = 2x$ і $y = -\frac{1}{2}x$. Для другої пари графіків розглядаємо трикутник OPQ, де $O(0;0)$, $P(2;4)$, $Q(2;-1)$. Тоді $PQ = 5$, за теоремою Піфагора знаходимо $OP^2 = 2^2 + 4^2$, $OQ^2 = 2^2 + 1^2$. За оберненою теоремою Піфагора маємо, що $\angle POQ = 90°$. Відтак, ми створили певний варіант «риштування» – базу скаффолдингу.

а) Формулюємо гіпотезу: графіки лінійних функцій $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, є перпендикулярними тоді й тільки тоді, коли $k_1k_2 = -1$.

б) Переходимо до міркувань у загальному вигляді на основі розібраного прикладу. Для цього спочатку спрощуємо задачу зведенням ситуації до розгляду графіків лінійних функцій $y = k_1x$ та $y = k_2x$, зображених на рис. 2 прямими, відповідно, ℓ_1 та ℓ_2, що перетинаються в точці $O(0; 0)$. Учні аналізують коректність такого кроку та його ефективність.

в) Розглядаємо трикутник OPQ, де $P(1;k_1)$, $Q(1;k_2)$, для якого потрібно забезпечити виконання умови $\angle POQ = 90°$. Пропонуємо учням вивести самостійно чи пояснити продемонстровані вчителем рівності $OP^2 = 1^2 + k_1^2$, $OQ^2 = 1^2 + k_2^2$, звертаючи увагу на те, що знаки коефіцієнтів k_1 і k_2 ролі не відіграють (це радимо пояснювати наприкінці цього кроку).

г) На основі формули (чи правила, розібраного заздалегідь на достатній кількості прикладів) для обчислення відстані між двома точками координатної осі допомагаємо учням переконатись у тому, що $PQ = |k_1 - k_2|$, $PQ^2 = (k_1 - k_2)^2$. Зауважимо, що саме цей крок часто викликає суттєві затруднення.

д) За допомогою теореми Піфагора (прямої та оберненої) зводимо задачу до поступового рівносильного переходу від умови $\angle POQ = 90°$ до рівностей $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$, $(k_1 - k_2)^2 = 1^2 + k_1^2 + 1^2 + k_2^2$, $k_1k_2 = -1$.

Ми бачимо, що деталізований план проведення міркувань («паралельний» розглянутому випадку графіків $y - 2x$ і $y = -\frac{1}{2}x$) дозволяє забезпечувати

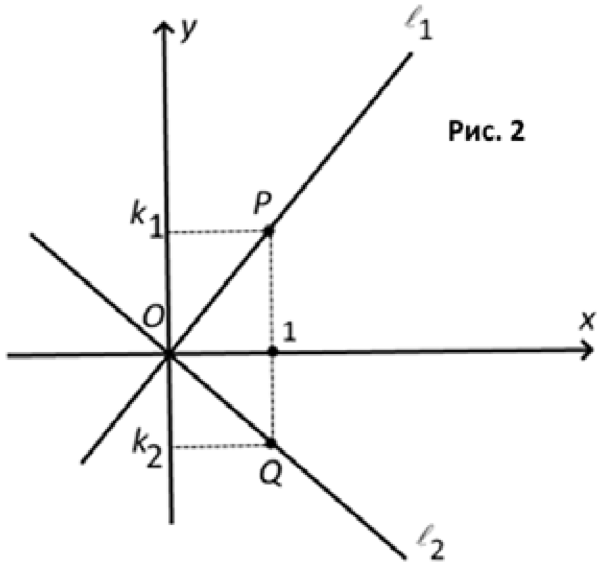

Рис. 2.

оптимальний рівень допомоги у динамічному гнучкому навчальному середовищі: учень за сприяння вчителя, в діалозі з іншими учнями не лише долає труднощі, але й засвоює нові математичні ідеї, зменшує потреби у підтримці, відчуваючи власний внесок у доведення. Тобто реалізується принцип *інтерналізації* [28]: зовнішні «риштування» демонтуються на певному етапі (можливо, навіть, на фінальному), коли учень засвоює логіку виконання завдання, залучені аналогії, технічний апарат і здатний виконувати подальші дії самостійно.

Для вчителів / майбутніх учителів. Слід здійснити порівняльний аналіз інших доведень критерію перпендикулярності (або – більш загального результату – знаходження кута між прямими на координатній площині), наведених у діючих підручниках для класів з поглибленим вивченням математики, у підручниках для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. Можна долучити і відомі студентам та вчителям поняття напрямного вектора прямої, її вектора-нормалі.

Продуктивність інструментарію скаффолдингу в розглянутому кейсі (змістова, процесуальна, референтна, ціннісна оцінка й самооцінка). Застосування кейс-методик у поєднанні зі скаффолдингом для формування зон найближчого математичного розвитку здобувачів освіти й зон предметно-методичного компетентнісного розвитку вчителів / майбутніх учителів потребує нерозривного зв'язку мотивуючих математичних сюжетів (у вигляді задач, евристичних завдань і т. д.), теоретичних здобутків зі спеціально підібраними задачами для закріплення – індикаторами досягнутих результатів. Такі задачі мусять переконати учнів, що завдяки власній пізнавальній ініціативності вони досягли відчутного випереджального ефекту, і тому вони не повинні містити складники, що помітно відрізняються від відпрацьованих на рівні базової мотивуючої задачі, на рівні теоретичних міркувань. Учні, студенти, учителі мають усвідомити перетворення зони найближчого математичного (предметно-методичного) розвитку на зону актуального розвитку, створення нової інтелектуальної та фахової якості – зміну самого суб'єкт пізнання та/або професійної діяльності (коли учень відповідний тип математичних задач розв'язує самостійно, а вчитель / майбутній вчитель спроможний дієво застосовувати педагогічну технологію в нових проблемних ситуаціях) (див. також [22]).

Розв'язування задач-індикаторів пропонується спочатку організовувати на уроках (гурткових, факультативних заняттях), дотримуючись принципів скаффолдингу, який у свідомості учнів став запорукою як колективного успіху, так і їхніх індивідуальних звершень (звісно, після цього деякі задачі пропонується розв'язати як домашнє завдання). Бажано прагнути до того, щоб учні на цьому етапі якомога більш ініціативно «керували» інтенсивністю процесу надання їм необхідної допомоги, прибирання «риштування». Добір задач для закріплення є відповідальним завданням для вчителя, студента, який вивчає методику викладання та/або опрацьовує супутні методичні питання під керівництвом викладача фундаментальної фахової дисципліни в університеті, у системі післядипломної освіти. Зокрема, дані питання відпрацьовувались зі студентами на кафедрі математики та методики її навчання Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського» і під час проведення занять з учителями-практиками на КПК в Одеській академії неперервної освіти, на авторських семінарах-практикумах тощо.

У нашому предметно-методичному кейсі можна скористатись і численними матеріалами математичних олімпіад, і – що особливо ефектно з методичної точки зору – дидактичним ресурсом діючого комплекта підручників для 8 і 9 класів з поглибленим вивченням математики (Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія – 8: підручн. для класів з погл. вивч. математики. Харків: Гімназія, 2021. 223 с.; Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія – 9 : підручн. для класів з погл. вивч. математики. Харків : Гімназія, 2021. 335 с.). Для прикладу візьмемо досить складну задачу 9.30* (за підручником для 8 класу), яка пропонується до теми «Середня лінія трикутника» (автори дають указівку до розв'язання задачі). Наприкінці навчального року до цієї задачі варто звернутись знов, продемонструвати восьмикласникам, що дану задачу включено і в розділ «Декартові координати на площині» підручника для 9 класу (задача 13.25**), але її розв'язування координатним методом стає для них уже цілком посильним у 8 класі.

Задача. Діагоналі опуклого чотирикутника *ABCD* є перпендикулярними. Через середини сторін *AB* і *AD* проведено прямі, перпендикулярні, відповідно, до сторін *DC* і *BC*. Доведіть, що точка перетину проведених прямих належить прямій *AC*.

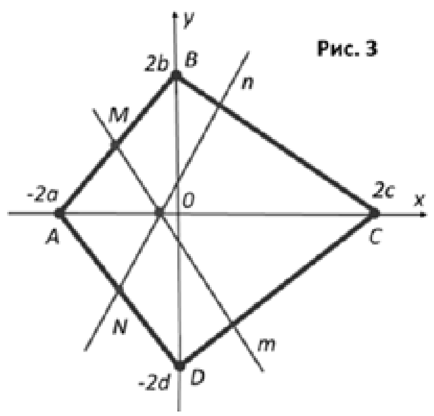

Рис. 3.

Для проєктування і розв'язування системи часткових задач, до якої зводиться розв'язування обраної задачі-індикатора, будемо слідувати технології скаффолдингу, застосованій для базової задачі, розібраної раніше. Бажано, щоб чергові кроки алгоритму пропонуватись слухачами. Можна заздалегідь скласти стислу технологічну карту на основі розгянутої базової задачі.

а) Перенесення змісту (умови) задачі на координатну площину (вибір системи координат та параметризація задачі).

Нехай *a, b, c, d* – додатні числа, $A(-2a;0)$, $B(0;2b)$, $C(2c;0)$, $D(0;-2d)$ – вершини даного чотирикутника. Тоді точки *M*(–*a*; *b*), $N(-a;-d)$ – середини сторін *AB* і *AD* відповідно (рис. 3). Через точку *M* проведемо пряму $m \perp DC$, через точку *N* – пряму $n \perp BC$. Визначення координат точок *M* і *N* як координат середини відрізка потребує підвищеного рівня допомоги з боку вчителя. Слід спільно з учнями сформувати математичну мету в межах нашої моделі задачі: довести, що точка перетину прямих *m* і *n* має нульову ординату.

б) Знаходимо лінійні функції, графіками яких є прямі *DC* і *BC*. Можна, до речі, обмежитись лише обчисленням кутових коефіцієнтів графіків: $k_{DC} = \frac{d}{c}$, $k_{BC} = -\frac{b}{c}$.

в) З умови перпендикулярності графіків лінійних функцій визначаємо кутові коефіцієнти графіків лінійних функцій, які збігаються з прямими *m* і *n*: $k_m = -\frac{c}{d}$, $k_n = \frac{c}{b}$.

г) Знаходимо лінійні функції, графіками яких є прямі *m* і *n*: $y = -\frac{c}{d}(x+a)+b$, $y = \frac{c}{b}(x+a)-d$. На цьому етапі учителю варто одне з рівнянь вивести на дошці.

д) Залишається розглянути відповідну систему лінійних рівнянь і отримати, що її розв'язком є $x = \frac{bd}{c} - a$, $y = 0$.

Робота над кейсом завершується змістовим (для вчителів, студентів – також і дидактико-методичним) аналізом досягнутих результатів.

Висновки та перспективи подальших розвідок. Як показують наші розвідки та багаторічна практика роботи з учнями (у тому числі – з такими, що мають підвищені освітні потреби й високий пізнавальний потенціал), студентами-математиками, учителями, скаффолдинг виступає як доцільна й очікувана технологія в педагогіці математики, пов'язана з розвивальним навчанням. Розвивальне навчання потребує мотивації, урахування реальних потреб, інтересів, можливостей класу в цілому і, бажано, кожного учня окремо, встановлення на цій базі зон найближчого математичного розвитку школярів та відповідних зон дидактичного та предметно-методичного компетентнісного розвитку вчителів / майбутніх учителів.

З нашої точки зору, у математичній галузі застосування скаффолдингу під час навчання розв'язування (методики розв'язування) задач підвищеної та олімпіадної складності є дієвим педагогічним інструментом, оскільки саме в математиці нетривіальними часто стають переформулювання, інтерпретація, визначення тематичного контексту (або навіть і розділу математичної науки, у межах якого в основному буде розв'язуватись задача), «розширена» актуалізація наявних опорних знань, окреслення сукупності теоретичних знать, методів і вмінь, яких бракує на момент розв'язування, коректного й доцільного розділення задачі на послідовні кроки (етапи) тощо. Розв'язування ускладнених задач, випереджальне вивчення нових методів, теоретичних фактів може негативно вплинути на психологічний стан як учня (відчуття можливих чи неминучих невдач і помилок), так і вчителя, який ризикує виявитись неготовим до партнерського діалогу з учнями в умовах відхилення від добре знайомих, апробованих чітких алгоритмів навчальної програми, підручників, невпевненості в ефективності запропонованих ним самостійних дидактико-методичних рішень. Зокрема, учитель, який прагне застосовувати випереджальне навчання за допомогою таких технологій, як *Case study*, скаффолдинг тощо, має дуже відповідально добирати належний матеріал. Це доводить необхідність якісного науково-методичного та науково-практичного супроводу роботи вчителя інституціями неперервної педагогічної освіти, включаючи інноваційний характер і постійне оновлення програм підвищення кваліфікації, творчих зв'язків з досвідченими колегами, участі в майстер-класах, семінарах і практикумах, присвячених проблемам викладання конкретних тематичних розділів. Аналогічного наповнення потребує академічний і квазіпрофесійний сегмент формування прототипів фахових компетентностей майбутнього вчителя математики в педагогічному університеті під час вивчення курсу методики викладання, спеціальних математичних дисциплін, підготовки кваліфікаційних робіт.

Численні дослідники відзначають, що в першу чергу кейс-метод є ефективним у вивченні гуманітарних, суспільних, економічних, соціальних, професійних дисциплін, природничих наук, у міжпредметній інтеграції (наприклад, у STEM-освіті). Педагогічний скаффолдинг конструктивно описується вченими переважно для мовної освіти, сфери інклюзії. Але ми вважаємо, що творче поєднання цих сучасних освітніх технологій може давати стійкий синергетичний ефект для математичної освіти, позитивно впливати на подолання різнопланових кризових явищ щодо її фундаменталізації на всіх рівнях (у тому числі й у професіоналізації математичної освіти – підготовці майбутніх учителів, підвищенні кваліфікації працюючих вчителів), сприяти пізнавальній акселерації у вивченні математики в Новій українській школі, профілізації старшої школи, активній організації поглибленого вивчення математики в базовій школі. Важливим для подальших розвідок є вивчення закономірностей та практичних прийомів здійснення скаффолдингу, його місця в середовищі інших методичних технологій та інструментів навчання математики, створення, обґрунтування та науково-методичне описання інших модельних актуальних предметно-методичних кейсів, пошук механізмів перенесення теоретичних результатів в освітню практику навчання школярів (включаючи роботу з обдарованими учнями), студентів педагогічних спеціальностей, організацію спеціальної підготовки педагогів до використання методичних інновацій.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Акименко Н., Папач О., Яковлєва О. Використання кейс-технологій при розв'язанні задач економічного змісту в базовій школі. *Фізико-математична освіта*. 2024. Т. 39. № 3. С. 12–23. DOI: https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i3.
2. Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Глобін О. І. Навчання математики в старшій школі на профільному рівні : Методичні рекомендації. Інститут педагогіки НАПН України, 2017. (Електронний ресурс). URL: https://undip.org.ua/library/navchannia-matematyky-v-starshiy-shkoli-na-profilnomu-rivni-metodychni-rekomendatsii (дата звернення: 09.08.2024).
3. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура. *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету*. 2014. № 1. С. 35–39.
4. Гончаренко С. У. Фундаменталізація освіти як дидактичний принцип. *Шлях освіти*. 2008. Т. 47. № 1. С 2–6.
5. Гончаренко С. У. Фундаменталізація професійної освіти як дидактичний принцип. *Теорія і практика управління соціальними системами: філософія, психологія, педагогіка, соціологія*. 2008. № 2. С. 87–91.
6. Задоріна, О. М., Мітельман, І. М., Папач О. І. Питання підготовки майбутніх учителів математики до інтеграції в систему післядипломної педагогічної освіти. *Нова педагогічна думка*. 2022. Т. 111. № 3. С. 81–90. DOI: https://doi.org/10.37026/2520-6427-2022-111-3-81-90.
7. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. 2009. № 2. С. 165–174.
8. Ісаєва О., Шайнер Г., Розман І. Кейс-технологія як інноваційний підхід викладання дисциплін у кризових умовах. *Молодь і ринок*. 2021. № 11–12(197–198). С. 39–43. DOI: https://doi.org/10.24919/2308-4634.2021.252826.
9. Клепко С. Ф. Філософія освіти в європейському контексті : монографія. Полтава : ПОІППО, 2006. 328 с.
10. Ковальова С. М. Технологія застосування кейс-методу в професійній підготовці вчителя в Україні. Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. Педагогічні науки. 2017. Вип. 3(89). С. 100–104.
11. Крупа О. Кейс-урок як виклик сьогодення. *Математика*. 2017. № 23(827). С. 4–7.
12. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України (2001–2006) : навч.-метод. посіб. Львів : Каменяр, 2008. 348 с.
13. Матяш О. І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії : монографія. Вінниця : ФОП Легкун В. М., 2013. 450 с.
14. Мітельман І. М. Розвиток предметно-галузевих компетентностей учителів математики в контексті формування згорнутих дидактичних структур. *Професійна компетентність сучасного педагога: методологія, теорія, методика, практика* : колект. моногр. Одеська акад. неперервної освіти. Одеса : видавець Букаєв Вадим Вікторович, 2019. С. 241–257.
15. Мітельман І. М. Особливості моделювання спеціалізованих методичних кейсів у контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини*. 2021. № 2. С. 137–149. DOI: https://doi.org/10.31499/2307-4906.2.2021.236672.
16. Мітельман І. М. Формування навичок знаходження найбільших значень функцій трьох змінних під час розв'язування деяких олімпіадних задач. *Збірник наукових праць Сумського державного педагогічного університету «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*. 2022. Вип. 2(20). С. 64–74. DOI: 10.5281/zenodo.7426573.
17. Мітельман І. М. Дидактичні ресурси agile-стратегій підготовки вчителів до роботи з математично обдарованими учнями. *Наша школа: науково-практичні студії*. 2023. Вип. 1(1). С. 65–73. DOI: https://doi.org/10.61339/2786-6947.2023.1.286305.
18. Мітельман І. М. Оцінювання деяких виразів з модулем числа під час розв'язування задач з параметрами в дидактичному контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Академічні візії*. 2023. Вип. 20. (Електронне фахове видання). DOI: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614 (дата звернення: 09.08.2024).
19. Моторіна В. Г. Професійна компетентність вчителя математики профільної школи : навч. посіб. для студентів природн.-матем. спеціальностей пед. ВНЗ. Харків : ХНПУ, 2014. 267 с.
20. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Харків : Факт, 2005. 360 с.
21. Семенець С. П. Навчальне моделювання методів доведення в шкільному курсі математики. *Математика в школі*. 2006. № 9. С. 12–16.
22. Семенець С. П. Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів. *Математика в рідній школі*. 2016. № 4. С. 14–18.
23. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. 2-ге доп. і перероб. вид. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.
24. Скворцова С. О. Формування професійної компетентності майбутнього вчителя на засадах контекстного навчання. *Психолого-педагогічні проблеми сільської школи* : зб. наук. пр. Уманського держав-

ного педагогічного університету імені Павла Тичини. Вип. 35. 2010. С. 66–71.

25. Скворцова С. О. Динамічна модель процесу формування методичних компетенцій у майбутніх учителів. *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах* : зб. наук. пр. Вип. 17 (70). Запоріжжя, 2011. С. 177–183.

26. Скворцова С. О. Теоретичні засади формування методичної компетентності майбутніх учителів у навчанні математики. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми* : зб. наук. пр. Вип. 43. Київ, Вінниця : ТОВ Фірма «Планер», 2015. С. 442–447.

27. Тарасенкова Н. О., Акуленко І. А. Методичні компетентності у системі фахової підготовки майбутнього вчителя математики. *Вища освіта України*. 2011. Вип. 3. С. 53–66.

28. Фідкевич О., Снєгірьова В. Скафолдинг у системі методів багатомовної освіти. *Український педагогічний журнал*. 2023. № 2. С. 107–114. DOI: https://doi.org/10.32405/2411-1317-2023-2-107-114.

29. Ягоднікова В. В. Кейс-метод (Case study) як форма інтерактивного навчання майбутніх фахівців. 2008. (Електронний ресурс). URL: http://www.rusnauka.com/1_NIO_2008/Pedagogica/25496.doc.htm (дата звернення 09.08.2024).

30. Anghileri J. Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 2006. Vol. 9. № 1. P. 33–52. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-006-9005-9.

31. Ball D. L. Uncovering the special mathematical work of teaching. *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. G. Kaiser (Ed.). 2017. Springer. P. 11–34.

32. Borko H., Eisenhart M., Brown C. A., Underhill R. G., Jones D., Agard P. Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*. 1992. Vol. 23. № 3, P. 194–222.

33. Kazak S., Wegerif R., Fujita T. Combining scaffolding for content and scaffolding for dialogue to support conceptual breakthroughs in understanding probability. *ZDM Mathematics Education*. 2015. Issue 47. P. 1269–1283. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-015-0720-5.

34. Lesseig K. Conjecturing, generalizing and justifying: Building theory around teacher knowledge of proving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. 2016. Vol. 17. № 3. (E-recourse). DOI: https://doi.org/10.4256/ijmtl.v17i3.27 (дата звернення 09.08.2024).

35. Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design. Cobb P., Yackel E., & McClain K. (Eds). Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates. 2000. DOI: https://doi.org/10.4324/978141060535.

36. Wood D., Bruner J., Ross G. The Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines*. 1976. № 17. P. 89–100. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x.