

ІНТЕГРОВАНІЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ МАЙБУТНІМИ ВЧИТЕЛЯМИ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

AN INTEGRATED APPROACH TO LEARNING DISCRETE MATHEMATICS BY FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

У статті детально розглянуто особливості інтегрованого підходу до вивчення дискретної математики майбутніми вчителями математики та інформатики. Під інтегрованим підходом розуміється поєднання різних компонентів навчання внутрішньопредметного та міжпредметного змісту, з метою формування у здобувачів освіти цілісної картини світу. Розкривається сутність інтеграції в освітньому процесі, зокрема, під час навчання дискретній математиці. Описується структура та особливості інтегрованих занять, які дозволяють встановити зв'язки між різними математичними поняттями, різними розділами навчальної дисципліни та різними освітніми компонентами. Розглядається роль та місце освітнього компоненту «Дискретна математика» в освітніх програмах підготовки вчителів математики та інформатики на освітньому рівні «Бакалавр». Виокремлюються три основні змістові модулі: теорія множин, комбінаторика й теорія графів, які складають основу курсу. Розглядаються особливості організації інтегрованих занять із зазначених модулів. Досліджуються можливості об'єднання різних освітніх компонент під час вивчення дискретної математики, що сприяє глибшому розумінню предмету. Оскільки вивчення дискретної математики спрямоване на розвиток критичного, алгоритмічного та креативного мислення майбутнього вчителя математики та інформатики, то вивчення різних тем пропонується обов'язково проводити в інтеграції із шкільним курсом математики (елементарна математика) та інформатики. На прикладі вивчення теми «Розфарбування графів» описано впровадження інтегрованого підходу, зокрема виокремлено міжпредметні зв'язки з елементарною математикою, теорією поліномів та інформатикою. Представлений алгоритм розфарбування графів на мові Python демонструє практичне застосування теоретичних знань. Розглянутий у статті підхід до організації вивчення дискретної математики дозволяє зробити освітній процес більш цікавим, ефективним та орієнтованим на практичне застосування отриманих знань.

Ключові слова: дискретна математика, інтегроване заняття, теорія множин, комбінаторика, теорія графів, розфарбування графів, алгоритми, підготовка вчителів.

The article examines in detail the features of an integrated approach to the study of discrete mathematics by future teachers of mathematics and computer science. The integrated approach means the combination of various components of intra-subject and inter-subject learning, with the aim of forming a holistic picture of the world in students. The essence of integration in the educational process is revealed, in particular, during the teaching of discrete mathematics. The structure and features of integrated classes are described, which make it possible to establish connections between different mathematical concepts, different sections of the academic discipline, and different educational components. The role and place of the educational component "Discrete mathematics" in the educational programs of training teachers of mathematics and computer science at the educational level "Bachelor" is considered. Three main content modules are distinguished: set theory, combinatorics and graph theory, which form the basis of the course. The peculiarities of the organization of integrated classes from the specified modules are considered. The possibilities of combining various educational components during the study of discrete mathematics are explored, which contributes to a deeper understanding of the subject. Since the study of discrete mathematics is aimed at the development of critical, algorithmic and creative thinking of the future teacher of mathematics and computer science, it is suggested that the study of various topics be carried out in integration with the school course of mathematics (elementary mathematics) and computer science. The implementation of an integrated approach is described on the example of studying the topic "Coloring graphs", in particular, interdisciplinary connections with elementary mathematics, the theory of polynomials and computer science are highlighted. The presented graph coloring algorithm in Python demonstrates the practical application of theoretical knowledge. The approach to organizing the study of discrete mathematics considered in the article makes it possible to make the educational process more interesting, effective and oriented to the practical application of the acquired knowledge.

Key words: discrete mathematics, integrated lesson, set theory, combinatorics, graph theory, graph coloring, algorithms, teacher training.

УДК 378.147:51
DOI <https://doi.org/10.32782/2663-6085/2025/79.1.13>

Зайка О.В.,
канд. пед. наук,
доцент кафедри фізико-математичної освіти та інформатики
Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка

Постановка проблеми у загальному вигляді.

У математиці важливу роль відіграють як неперервні величини так і дискретні. Так, математичний аналіз в переважній більшості має справу із неперервними величинами, але в шкільній математиці часто зустрічаємося із дискретними. Дискретна математика розглядає дослідження різних за характером об'єктів та структур, які задаються на

скінченних множинах [4; 13]. Вона лежить в основі підготовки майбутніх фахівців з математики, програмування (інформатика), економіки, інженерії тощо. А тому відіграє велику роль під час підготовки майбутнього вчителя математики та інформатики. Для підвищення якості підготовки такого фахівця необхідно використовувати зокрема інтегрований підхід до вивчення дискретної математики, тобто

поєднання різних компонентів змісту навчання внутрішньопредметного та міжпредметного характерів, з метою формування у здобувачів освіти цілісної картини світу [6].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Використання інтегрованого підходу до вивчення дискретної математики розглядаються в роботах сучасних дослідників. Так у статті Страх О., Лукашової Т. [13] розглянуто міждисциплінарні зв'язки дискретної математики і теорії диференціальних рівнянь, розкрито аналогію між різницеvim численням та диференціальним й інтегральним численнями. Питанню використання на заняттях з дискретної математики пакету Maple присвячена робота Сосницької Н. та Онищенко Г. [12]. Особливості змісту курсу для вивчення на природничих факультетах досліджує Красницький М. [3]. Питанню використання тренажерів з метою формування логічного мислення здобувачів освіти присвячена робота Лаврик Т. й Маслової З. [5]. Методологічні основи дисципліни розкриті у монографії Кугай Н. [4]. Використання міждисциплінарних зв'язків, зокрема теорії графів, під час навчання математичної інформатики розглянуто Кобильник Т. [2]. У праці Яньхонг Енні Лю & Метью Кастеллана [15] запропоновано викладання дискретної математики здійснювати в інтеграції із програмуванням.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Навчальна дисципліна «Дискретна математика» розглядає вивчення трьох модулів: теорія множин, комбінаторика та теорія графів. Під час навчання цієї дисципліни майбутніми вчителями математики, інформатики, з метою розвитку всебічно розвиненого фахівця, необхідно використовувати інтегрований підхід, тобто під час вивчення кожного модуля обґрунтовувати зв'язок між різними розділами математики, інформатики і дискретної математики.

Мета статті: розглянути особливості організації інтегрованих занять з дискретної математики під час підготовки майбутніх вчителів математики та інформатики на прикладі теми «Розфарбування графів».

Виклад основного матеріалу. Вивчення різних навчальних компонентів не повинно бути ізольованим. Оскільки, кожен освітній компонент можна уявити як окремий пазл великої картини. І якщо здобувач освіти не бачить цієї системи зв'язків, то й не отримує розуміння ролі даного

освітнього компоненту. Тому, навчаючи кожного предмету, необхідно демонструвати положення цього «пазлу», щоб скласти цілісну картину підготовки фахівця.

Поняття «інтеграція» має багато різних тлумачень. Детальний аналіз цього поняття проведено Бабенком А. [1], де під інтеграцією пропонується розуміти такий процес розвитку системи, який спирається на взаємопроникненні елементів, в результаті чого отримується органічна цілісність. Педагоги розрізняють інтегровані заняття та заняття з міжпредметними зв'язками. Так, Фіцула М. [14] підкреслює, що інтегроване заняття та заняття з міжпредметними зв'язками відрізняються тим, що перші містять окремі блоки, а другі – наче «спресовують» матеріал кількох предметів. Міждисциплінарні зв'язки передбачають включення до заняття окремих запитань чи завдань з інших предметів. Ми погоджуємося із висновками Савченко О. [11] та Бабенко А. [1] щодо інтегрованого заняття, як заняття, що спирається на гармонійне поєднання навчальних матеріалів кількох суміжних дисциплін, які розглядають одну тему, включаючи здобувачів освіти у різні види діяльності, що дозволяє досягнути цілісного сприйняття та розуміння навчального матеріалу. Метою таких занять є встановлення зв'язків між окремими навчальними компонентами чи розділами, для формування розуміння матеріалу на основі внутрішньопредметної та міжпредметної інтеграції (рис. 1).

Для визначення дисциплін, з якими доцільно поєднувати вивчення дискретної математики, організовуючи інтегровані заняття або заняття на міждисциплінарній основі, проаналізуємо її взаємозв'язок з освітніми компонентами навчального плану майбутніх вчителів математики та інформатики.

Дискретна математика досліджує різні структури, задані на скінченних множинах [4; 15]. Поняття «множина» є одним із понять математичного аналізу, алгебри і теорії чисел (зокрема під час визначення різних алгебраїчних структур), геометрії (множина точок утворює фігуру), шкільної математики (зокрема, арифметики), комбінаторики, інформатики (використовуються для опису вхідних та вихідних даних алгоритмів; у базах даних, різних мовах програмування), фізики тощо.

Елементи комбінаторики, що є другим змістовим модулем дискретної математики,

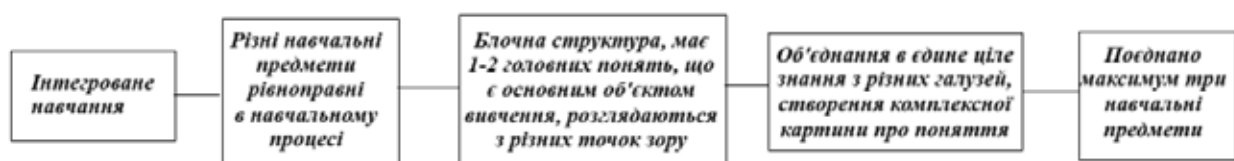


Рис. 1. Інтегроване заняття

розглядається в школі, використовуються в теорії ймовірності (під час знаходження ймовірності) та математичній статистиці, інформатиці (наприклад, для аналізу ефективності алгоритмів сортування, у теорії інформації, у криптографії), фізиці (статистична фізика та квантова механіка), біології (для аналізу комбінацій генів), лінгвістиці та соціології.

Теорія графів – третій змістовий модуль дискретної математики. Завдяки графам можна представляти алгебраїчні структури, у геометрії їх можна використати для моделювання геометричних об'єктів, у шкільній математиці можна використовувати під час аналізу логічних задач (наприклад, задачі на використання Ейлерових графів – можливість зобразити рисунок, не відриваючи олівця від паперу, утворення різних чисел із заданих цифр тощо). Широке застосування графи мають в інформатиці, зокрема для представлення комп'ютерних мереж та протоколів, схем баз даних та зв'язків між таблицями, для моделювання нейронних мереж. Графи використовуються й в інших науках: у фізиці (електричні схеми), хімії (кристалічні решітки), біології (еволюційні мережі), географія (карти), соціології (аналіз соціальних мереж), економіці (задачі на оптимізацію), лінгвістиці тощо.

Оскільки ми розглядаємо вивчення дискретної математики майбутніми вчителями математики та інформатики, то доречним буде проводити інтегровані заняття з математичними дисциплінами (зокрема, з математичним аналізом, вищою алгеброю), елементарною математикою (вивчення шкільного курсу математики), теорією ймовірності та інформатикою.

Проаналізувавши різні освітні програми освітнього ступеня «Бакалавр» підготовки майбутніх вчителів математики та інформатики, зокрема, Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка [7], Українського державного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова [9], Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини [10], ми прийшли до висновку, що дискретна математика розглядається на другому навчальному році після вивчення таких дисциплін як математичний аналіз, вища алгебра, вища геометрія, хоча у Глухівському національному педагогічному університету імені Олександра Довженка [8] вона вивчається на третьому курсі й не є обов'язковою дисципліною.

Вивчення теорії множин доречніше проводити в інтеграції із відомостями, отриманими здобувачами освіти під час вивчення математичного аналізу, який у педагогічних університетах розглядається на першому курсі, та елементарної математики (розглядаючи теорію множин із шкільного курсу математики, зокрема операції

над множинами, використання кіругів Ейлера, розв'язування нерівностей тощо).

Вивчення комбінаторики доречно поєднувати із елементарною математикою (комбінаторика у шкільних підручниках), і з теорією ймовірності. Тут все залежить від структури освітньої програми. Так, наприклад, в Уманському державному педагогічному університеті імені Павла Тичини [10] «Теорія ймовірності та математична статистика» не входить до обов'язкових навчальних дисциплін, тому під час такої інтеграції викладачеві доведеться пригадувати поняття ймовірності, відомої здобувачам освіти зі школи. А в Глухівському національному педагогічному університеті імені Олександра Довженка [8], вивчення «Теорії ймовірності та математичної статистики» передуює вивченню дискретної математики, що спрощує таку інтеграцію предметів.

Вивчення графів доцільно поєднувати із вивченням елементарної математики, демонструючи розв'язування логічних задач, та інформатикою, де графи мають широке застосування.

Оскільки вивчення дискретної математики спрямоване на розвиток критичного, алгоритмічного та креативного мислення майбутнього вчителя математики та інформатики, то вивчення різних тем необхідно обов'язково проводити в інтеграції із шкільним курсом математики та інформатики.

Розглянемо для прикладу інтегроване заняття на тему «Розфарбування графа». Основні поняття теми пов'язані із поняттями графа, хроматичного числа, хроматичного поліному та різних алгоритмів відшукування цього хроматичного числа. Отже, маємо тісний зв'язок із алгеброю поліномів, інформатикою та шкільною математикою (створення схем розв'язування текстових задач, зокрема й логічних).

Тоді, на початку заняття можна запропонувати шкільну задачу, яку легко розв'язати за допомогою представлення умови у вигляді графа та використавши розфарбування вершин.

Наприклад. У деякому дачному товаристві є 5 будинків А, В, С, D, Е, кожен з яких з'єднаний з іншими будинками алеями: А з'єднаний із В і С; В – з А, С, D; С – з А, В, Е; D – з В і Е; Е – з С і D. Господарі будинків вирішили пофарбувати їх так, щоб жодні сусідні будинки не були одного кольору. Чи можливо це? Якщо так, то яка мінімальна кількість фарб потрібна?

Оскільки попередніми темами було вивчення графів, здобувачі освіти розуміють, що задачу потрібно представити саме у вигляді графа (рис. 2). А далі йдуть логічні міркування. Зрозуміло, що пофарбування можна здійснити. І бачимо, що максимально – це буде 5 кольорів, а от мінімальна кількість становить три.

Далі розглядаємо теорію теми «Розфарбовування графів»: поняття розфарбування, поняття

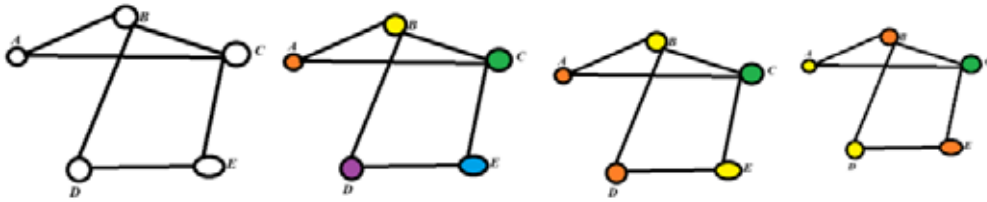
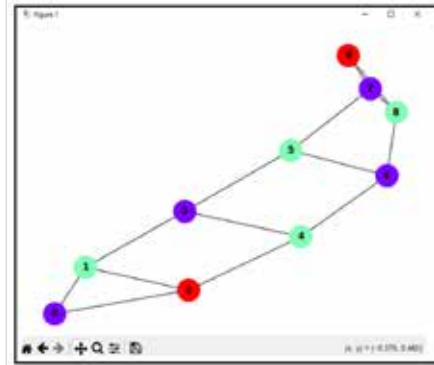


Рис. 2. Розв'язування задачі



```

1 import networkx as nx
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Створення графа
5 num_vertices = 10
6 graph = nx.Graph()
7
8 # Додавання вершин
9 graph.add_nodes_from(range(num_vertices))
10
11 # Додавання ребер (можна змінити для інших прикладів)
12 edges = [
13     (0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 4),
14     (3, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 6), (5, 7),
15     (6, 8), (7, 8), (7, 9), (8, 9)
16 ]
17 graph.add_edges_from(edges)
18
19 # Метод розфарбування
20 def color_graph(graph):
21     colors = {}
22     for node in graph.nodes():
23         neighbor_colors = {colors[neighbor] for neighbor in graph.neighbors(node) if neighbor in colors}
24         for color in range(len(graph)):
25             if color not in neighbor_colors:
26                 colors[node] = color
27                 break
28     return colors
29
30 # Розфарбування графа
31 colors = color_graph(graph)
32
33 # Призначення кольорів
34 color_map = [colors[node] for node in graph.nodes()]
35
36 # Візуалізація
37 plt.figure(figsize=(8, 6))
38 nx.draw(
39     graph, with_labels=True, node_color=color_map,
40     node_size=800, cmap=plt.cm.rainbow, font_weight='bold'
41 )
42 plt.show()
43

```

Рис. 3. Розфарбування графу з 10 вершинами, Python

хроматичного числа та хроматичного поліному, теореми Візінга, Брукса, Шеннона, Вітні, Кенінга.

Тут можна продемонструвати зв'язок між дискретною математикою та теорію многочленів, адже хроматичний поліном дозволяє розглядати розфарбування графів з точки зору алгебри, оскільки він є функцією від числа λ , яке задає кількість доступних кольорів. Хроматичний поліном $P(G, \lambda)$ графа G визначається як: $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1)$, де n – кількість вершин у графі G . Пригадуємо методи знаходження коренів многочленів різних степенів, властивості многочленів.

Далі розглядаються алгоритми розфарбування графів, зокрема: жадібний алгоритм, алгоритм Уелша-Паулле, переборний алгоритм, DSATUR, алгоритм обміну кольорами, точні алгоритми та інші. Це той матеріал, який необхідно подавати у тісному зв'язку з інформатикою, пропонуючи здобувачам освіти скласти відповідний алгоритм та перевірити його.

Так, наприклад, можна запропонувати реалізувати один із алгоритмів на мові програмування: Python, C++, Java. На мові Python це може виглядати як на рисунку 3.

Таким чином майбутній вчитель математики та інформатики одразу бачить тісний взаємозв'язок між навчальними дисциплінами та розуміє необхідність у вивченні даного освітнього компонента.

Висновки. Дискретна математика є фундаментальною дисципліною для багатьох сучасних галузей, особливо тих, що пов'язані із інформаційними технологіями, а отже, відіграє велику роль під час підготовки майбутніх вчителів математики та інформатики. Здатність бачити зв'язки між різними розділами дискретної математики та іншими математичними дисциплінами, бачити зв'язок із інформатикою, знання основних понять та методів дискретної математики й вміння їх використовувати у різних ситуаціях, можна сформувати у здобувачів освіти під час проведення інтегрованих занять.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Бабенко А.Л. Сутність і зміст понять «інтеграція» та «інтеграційне заняття». *Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Педагогіка. Соціальна робота.* Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла». 2015. Випуск 37. С. 9–12.
2. Кобильник Т. П. Використання міжпредметних зв'язків при навчанні математичної інформатики у педагогічному університеті. *Науковий часопис Українського державного університету імені Михайла Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання.* Випуск 8 (15). С. 143–148.

3. Красницький М.П. Про зміст курсу дискретної математики для природничих факультетів. *Методологія викладання математичних дисциплін для нематематичних спеціальностей у сучасних умовах: Тези доповідей Всеукраїнської науково-методичної конференції* (Суми, 16–18 грудня 2009 року) / Ред. кол.: К.М. Левківський, В.О. Ячменьов. Суми: СумДУ, 2009. С. 117–118.

4. Кугай Н.В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики: монографія. Харків: ФОП Панов А.М. 2017. 336 с.

5. Лаврик Т.В., Маслова З.І. Використання тренажерів у дискретній математиці як один зі способів формування алгоритмічного мислення у студентів. *Сучасні інформаційні системи і технології: матеріали II міжнародної науково-практичної конференції* (м. Суми, 21–24 травня 2013) / Ред.кол.: А.С. Довбиш, О.А. Борисенко, О.В. Бондар. Суми: СумДУ, 2013. С. 101.

6. Люк О.В. Інтегрований підхід як методологічна основа цілісного освоєння змісту початкової освіти. *Науково-методична робота.* URL: <http://surl.li/djrvfy>

7. ОПП «Середня освіта (Математика та інформатика)». ОС Бакалавр. Сумський державний педагогічний університет ім. А. С. Макаренка. 2024. URL: <http://surl.li/tdchbr>

8. ОПП «Середня освіта (Математика та інформатика)». ОС Бакалавр. Глухівський національний педагогічний університет ім. О. Довженка. 2024. URL: <http://surl.li/lpdgwk>

9. ОПП «Середня освіта (Математика)». ОС Бакалавр. Український державний університет ім. М. П. Драгоманова. 2022. URL: https://drive.google.com/file/d/1uQggjXn3RHSEefn6DZFageKtaRq_26Qz/view

10. ОПП «Середня освіта (Математика. Інформатика)». ОС Бакалавр. Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини. 2024. URL: https://fmf.udpu.edu.ua/images/inf_pac_2019/2024/ZOP_V_M_I_2024.pdf

11. Савченко О.Я. Дидактика початкової школи: підручник для студентів педагогічних факультетів. К.: Абрис. 1997. 416 с.

12. Сосницька Н.Л., Онищенко Г. О. Використання інформаційно-комунікаційних технологій на заняттях з дискретної математики. *Новітні комп'ютерні технології.* Т. XV. 2017. С. 206–209. URL: <https://ccjournals.eu/ojs/index.php/nocote/article/view/625/682>

13. Страх О.П., Лукашова Т.Д. Міждисциплінарні зв'язки при вивченні деяких тем дискретної математики та диференціальних рівнянь. *Фізико-математична освіта.* 2021. Випуск 3(29). С. 112–118.

14. Фіцула М.М. Педагогіка: навчальний посібник (для студентів вищих педагогічних закладів освіти). К.: Видавничий центр «Академія». 2002. 528 с.

15. Yanhong A. Liu, Matthew Castellana. *Discrete Math with Programming: A Principled Approach.* URL: <http://surl.li/fzweyf>