

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ В ПРИРОДІ ТА АРХІТЕКТУРІ

DIFFERENTIAL CALCULUS IN NATURE AND ARCHITECTURE

УДК 378

DOI <https://doi.org/10.32782/2663-6085/2025/79.2.31>**Тегза А.М.,**

канд. фіз.-мат. наук,
доцент кафедри теорії ймовірностей
і математичного аналізу
Державного вищого навчального
закладу «Ужгородський національний
університет»

Імре Ю.Ю.,

ст. викладач кафедри фізико-
математичних дисциплін
Українсько-угорського навчально-
наукового інституту Державного вищого
навчального закладу «Ужгородський
національний університет»

Кенгерц С.С.,

ст. викладач кафедри фізико-
математичних дисциплін
Українсько-угорського навчально-
наукового інституту Державного вищого
навчального закладу «Ужгородський
національний університет»

Неце А.Е.,

ст. викладач кафедри фізико-
математичних дисциплін
Українсько-угорського навчально-
наукового інституту Державного вищого
навчального закладу «Ужгородський
національний університет»

Стаття присвячена проблемам та методам ефективного підготовки спеціалістів в області математики та фізики. Диференціальне числення – це один із фундаментальних розділів математичного аналізу, що забезпечує потужний інструментарій для вивчення змінних процесів. Його основні поняття, такі як похідна та диференціал, дозволяють аналізувати швидкість змін, оптимізувати процеси та моделювати складні системи. Однак значення диференціального числення виходить далеко за межі чисто математичних задач, виявляючи свою універсальність у багатьох галузях людського знання.

У природі диференціальне числення допомагає пояснити такі явища, як рух рідин, поширення світла чи ріст рослин. Наприклад, математичні моделі, що базуються на похідних, використовуються для опису траєкторії польоту птахів або швидкості росту дерев. Ці інструменти дозволяють не лише пояснювати природні явища, але й передбачати їх з високою точністю.

В архітектурі диференціальне числення також знаходить широке застосування. Завдяки аналізу похідних можна оптимізувати форми будівель, розраховувати навантаження на конструкції та створювати інноваційні проекти, що гармонійно поєднують естетику і функціональність. Сучасні архітектори все частіше звертаються до математичних моделей для створення адаптивних і стійких конструкцій.

Ця стаття присвячена дослідженню використання диференціального числення у природі та архітектурі. Ми розглянемо основні принципи цього математичного апарату, проаналізуємо конкретні приклади його застосування та окреслимо перспективи розвитку нових підходів у цих галузях.

Стаття загалом буде корисною для учнів з профільним навчанням математики та фізики, для студентів та всіх, хто цікавиться математикою і природою.

Ключові слова: диференціальне числення, прикладне застосування, архітектура, екстремум функції.

The article is devoted to the problems and methods of effective training of specialists in mathematics and physics. Differential calculus is one of the fundamental branches of mathematical analysis that provides powerful tools for studying variable processes. Its basic concepts, such as the derivative and differential, allow you to analyze the rate of change, optimize processes, and model complex systems. However, the value of differential calculus goes far beyond purely mathematical tasks, revealing its versatility in many areas of human knowledge. In nature, differential calculus helps to explain phenomena such as the movement of liquids, the propagation of light, or the growth of plants. For example, mathematical models based on derivatives are used to describe the flight path of birds or the growth rate of trees. These tools allow not only to explain natural phenomena but also to predict them with high accuracy.

Differential calculus is also widely used in architecture. The analysis of derivatives helps to optimize building shapes, calculate loads on structures, and create innovative designs that harmoniously combine aesthetics and functionality. Modern architects are increasingly turning to mathematical models to create adaptive and sustainable structures.

This article is dedicated to the study of the use of differential calculus in nature and architecture. We will review the basic principles of this mathematical apparatus, analyze specific examples of its application, and outline the prospects for the development of new approaches in these fields. The article will generally be useful for students with specialized training in mathematics and physics, for students and anyone interested in mathematics and nature.

Key words: differential calculus, application, architecture, function extremum.

Постановка проблеми у загальному вигляді.

Диференціальне числення є невід'ємною частиною сучасної шкільної програми для учнів профільних класів, але його практичне застосування часто залишається незрозумілим для багатьох школярів. Брак зв'язку між теоретичними поняттями та реальними прикладами призводить до втрати інтересу до цього важливого розділу математики. Особливо це стосується учнів, студентів, які мають природничо-наукову чи інженерну спрямованість, для яких розуміння прикладного значення диференціального числення є ключовим.

Виникає необхідність створення матеріалів, які б пояснювали значення диференціального числення через зрозумілі приклади з природи та архітектури. Це дозволить учням не лише оволодіти теорією, але й усвідомити практичну цінність отриманих знань. Таким чином, проблема

полягає в розробці доступного і наочного підходу до вивчення диференціального числення, що сприятиме глибшому розумінню та мотивації учнів профільних класів, коледжів, студентів вишів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Останні дослідження підкреслюють важливість інтеграції прикладних аспектів диференціального числення в освітні програми профільних шкіл та коледжів. Більшість публікацій присвячені або теоретичним, або суто технічним елементам диференціального числення [1]. Є посібники і статті, присвячені геометричним та фізичним застосуванням похідної [2], а також використанням її у економії, біології і фізиці [3]. Натомість застосування похідних з інженерним спрямуванням зустрічаються рідко.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Є безліч підручників,

посібників, статей, які вивчають теорію похідних, проте дуже незначна кількість із них присвячена прикладному застосуванню цієї теорії. Також потребують уваги комп'ютерні інструменти, які дозволяють пришвидшити технічні розрахунки та візуалізувати або інтерактивно досліджувати функціональні зв'язки. Впровадження цих підходів сприятиме підвищенню якості математичної освіти та підготовки учнів, студентів до успішної професійної діяльності.

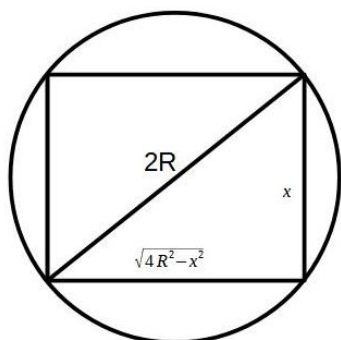
Мета статті. Ознайомити читача з прикладами використання похідних у природі та архітектурі. Визначити ефективні методики для викладання цієї теми в освітніх установах.

Виклад основного матеріалу дослідження. В архітектурі похідні допомагають у розрахунку оптимальних форм конструкцій, забезпечуючи їх стійкість та ефективність використання матеріалів. Наприклад, принципи диференціального числення застосовуються при проектуванні куполів, арок і мостів, що дозволяє створювати естетично привабливі та надійні споруди.

Загалом, розрізняють два підходи оптимізації прикладних моделей. Перший спосіб – покращення досягається за рахунок зміни якості вимірів, тобто перехід на нову технологію виготовлення продукції або вибір нових конструктивніших рішень проблеми. При другому підході міняють кількісні показники, наприклад, розміри параметрів досліджуваного об'єкта, співвідношення речовин, що використовуються для хімічної реакції і т.п. В даній статті нас цікавитиме другий підхід, оскільки з математичної точки зору це задачі на відшукування найбільшого і найменшого значення функції, яка залежить від однієї або кількох змінних.

Розглянемо кілька практичних задач із будівельної галузі.

Приклад 1. Основними елементами будівельної конструкції є балки, бруси та дошки. Нехай деяка пилорама має в наявності круглі (з радіусом R), циліндричні бревна фіксованої довжини l . Для виготовлення досок, щоб мати мінімум відходів потрібно витесати із даних бревен бруси найбільшого об'єму. Оскільки довжина бревна (а, отже, і майбутнього бруса) є незмінною, то математично дана проблема зводиться до того, щоб у круг, радіуса R вписати прямокутник максимальної площі.



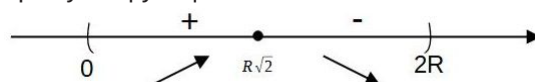
Тому, позначивши одну із сторін прямокутника через x , застосувавши теорему Піфагора, знайшли другу сторону і одержали функціональну залежність площі від довжини сторони: $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Застосувавши теорію диференціального числення, знайдемо таке значення x , при якому функція $S(x)$ досягає найбільшого значення. Працюємо за відомим алгоритмом:

$$1) S'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

2) Прирівняємо похідну до 0, щоб згідно необхідної умови існування екстремума функції знайти точки, підозрілі на екстремум.

$$S'(x) = 0; \Rightarrow x = R\sqrt{2}.$$

3) Тепер перевіримо достатню умову існування екстремума функції:



Отже, точка $x = R\sqrt{2}$ є точкою максимуму. Тобто, щоб отримати брус найбільшого об'єму, поперечним перерізом бревна має бути квадрат зі стороною $R\sqrt{2}$.

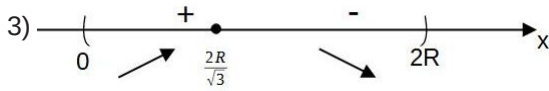
Приклад 2. Перші дослідження з опору матеріалів, міцності балок, арок та інших будівельних конструкцій провів геніальний італійський науковець, математик, художник Леонардо да Вінчі. Він казав, що «механіка – це рай для математичної науки, оскільки ми одержуємо в ній плоди математики». Він встановив, що у довільному брусі, що спирається на опори, але який має можливість вільно прогинатись, при незмінності поперечного перерізу і однорідності матеріалу, та його частина, яка знаходиться на найбільшій відстані від опор, прогинається найбільше. У щоденниках Леонардо збереглися описи дослідів з прогину балок і багато інших, проте ці результати не були опублікованими. Але багато вчених послуговувались цими записами для подальших відкриттів.

Міцність балки залежить від того, яку форму має поперечний переріз. Причому висота перерізу грає важливішу роль, ніж його ширина. Адже набагато важче зігнути лінійку, поставлену ребром, ніж поставлену лежачи. В теорії опору матеріалів доведено, що міцність балки з прямокутним перерізом пропорційна ширині балки a і квадрату її висоти h . Тобто міцність балки рівна $P = kah^2$, де k – коефіцієнт пропорції, що залежить від довжини балки, матеріалу, із якого вона зроблена і т. д. Тому у майстрів виникає така проблема: із круглого бревна, радіусом R , витесати балку максимальної міцності.

Враховуючи попередню задачу, матимемо, що $a = x$, $h = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Тобто формула міцності балки має вид функції: $P(x) = kx(4R^2 - x^2)$, де $x \in (0; 2R)$. Дослідимо її на екстремум.

$$1) P'(x) = k(4R^2 - 3x^2)$$

$$2) P'(x) = 0, \Rightarrow x = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$



Отже, $x = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ є оптимальним значенням ширини a балки. Тоді висота балки матиме значення $h = \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$. А співвідношення $\frac{h}{a}$ буде рівним $\sqrt{2} \approx 1.4 = \frac{7}{5}$. Саме така пропорція висоти до ширини балки прописана вимогами виробництва будівельних робіт.

Приклад 3. Прогинання балки залежить не тільки від її матеріалу, міцності, жорсткості, а й від її довжини, розподілу навантаження, від того, чи обидва кінці балки закладені в стіну чи тільки один кінець і т. д. Під одним і тим же навантаженням дерев'яна балка прогнеться сильніше, ніж металева, довша – сильніше ніж коротша, тонша – сильніше ніж товста. Залежність прогину балки від матеріалу, із якого вона зроблена, зв'язана з особливою величиною E – модулем Юнга (названий на честь англійського фізика XIX століття Томаса Юнга). Чим більшим є модуль Юнга даного матеріалу, тим менше він витягується під дією навантаження. До прикладу, для заліза модуль Юнга рівний 180 Н/м^2 , а для дуба – 15 Н/м^2 . Але залежність прогину балки від матеріалу, із якого вона зроблена, більш цікавить фізиків. Математиків натомило цікавить залежність прогину від довжини балки, від розмірів і форми її перерізу. Під дією сили тиску нижні шари балки розтягуються, а верхні стискаються. Між ними є нейтральний шар, який ні розтягується, ні стискається. Якщо переріз балки є прямокутним, то цей шар знаходиться посередині. Опір балки до вигину залежить від числа, який називають моментом інерції цього перерізу відносно нейтрального шару. Щоб обчислити цей момент, діють наступним чином. Переріз балки умовно розрізають на дуже тоненькі шари і масу кожного шару множать на квадрат відстані цього шару до нейтрального шару. Сума цих добутків і дає наближене значення моменту інерції. Чим тоншими є шари розрізу, тим точніший матимемо результат. Але точне значення моменту інерції виражається інтегралом. Перейдемо до задачі на дослідження прогину балки.

Нехай маємо балку довжиною l , яка обома кінцями вкладається у стіни і покладемо на неї рівномірно розподілене навантаження Q . Тоді прогин у точці, яка знаходиться на відстані x від лівого кінця балки виражається формулою:

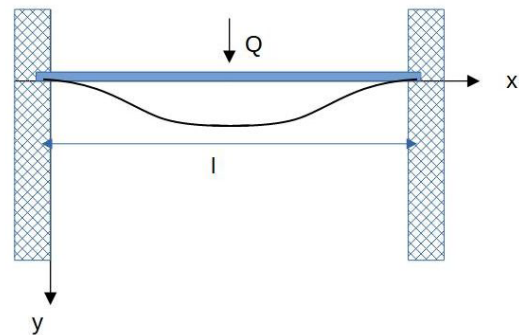
$$Y = \frac{Q}{24EI} x^2(l-x)^2, \quad (1)$$

де E – характеризує модуль пружності, модуль Юнга, I – момент інерції перерізу. Дана формула є розв'язком деякого диференціального рівняння 4-го порядку з певними початковими умовами. Але одержання цієї формули не є ціллю даної статті.

Добуток EI – називають жорсткістю балки. Можна збільшити жорсткість балки, не змінюючи площі поперечного перерізу. Для цього потрібно зосередити основну масу балки на великій відстані від нейтрального шару, наприклад замінити суцільну балку трубою або двотавровою балкою.

Відношення $\frac{Q}{I}$ називають інтенсивністю навантаження. Чим більшою є інтенсивність, тим сильніше прогинається балка.

Яким би не був числовий коефіцієнт у формулі (1), графік многочлена 4-го порядку виглядатиме як парабола, випукла вгору, із перегнутими кінцями віток. Тобто схематично наша балка під дією навантаження Q матиме вигляд:

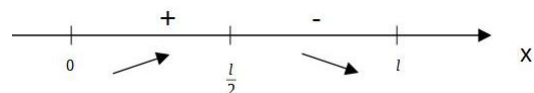


Тому очевидно, що найбільший прогин буде всередині балки. Проте, якщо не перейматись графіком функції (1), а математично розглянути задачу на відшукування максимуму функції, то матимемо реалізацію стандартного алгоритму:

$$1) Y'(x) = 2kx(l-x)^2 - 2kx^2(l-x), \text{ де } k = \frac{Q}{24EI};$$

$$2) Y'(x) = 0, \Rightarrow (l-x)x(l-2x) = 0, \text{ а отже } x = 0, x = \frac{l}{2}, x = l;$$

3) перевіряємо достатню умову екстремума:



Тому, при $x = \frac{l}{2}$ функція досягає найбільшого значення, тобто величина найбільшого прогину балки буде рівною: $Y_{\max} = \frac{Ql^3}{384EI}$.

Отже, якщо взяти дві балки, виготовлені з одного матеріалу, які мають однакову форму перерізу, але є різними за довжиною удвічі, то якщо покласти на них однакове навантаження (з тією ж вагою), то величина прогину для довшої балки збільшується у 8 разів. Якщо одна балка буде втричі довша за іншу, то вона матиме у 27 разів більший прогин.

При будівництві балконів, балки вбудовуються лиш одним кінцем (їх називають консольними). Тоді формула прогину такої балки матиме вигляд:

$$Y = \frac{q}{24EI} x^2 (x^2 - 4lx + 6l^2).$$

Очевидно, що найбільший прогин буде на вільному кінці балки, тобто при $x = l$ матимемо $Y_{max} = \frac{ql^3}{8EI}$. У даному випадку навіть нема сенсу перевіряти правдивість цього результату через диференціальне числення.

Рекомендації щодо інтеграції теми в освітній процес

Для кращого сприйняття та засвоєння учнями і студентами теорії диференціального числення педагогу слід використовувати міждисциплінарні підходи, тобто підбирати і розв'язувати реальні задачі з природознавства та різних галузей життєдіяльності.

2. Можна давати учням самим створювати міждисциплінарні проєкти, що підкреслюють зв'язок математики (диференціального числення) з іншими науками та мистецтвом (наприклад, проєкти про екологічну оптимізацію чи архітектурні моделі).

3. Пояснення теоретичного матеріалу і практичне розв'язування задач можна супроводжувати елементами комп'ютерної підтримки. Тобто інтеграція програмного забезпечення (Python, GeoGebra, Desmos, WolframAlpha) дозволить вчителю продемонструвати як експериментувати з похідними, досліджувати їхній вплив на функції.

Висновки. Диференціальне числення – це не просто математичний інструмент, а ключ до розуміння закономірностей світу, розвитку аналітичного мислення та підготовки учнів до сучасних викликів у різних сферах життя. Його інтеграція в освітній процес допомагає формувати покоління, здатне аналізувати складні системи, створювати інновації та приймати зважені рішення. Впровадження ефективних методик навчання, що поєднують теорію з практикою, сприяє розвитку творчого підходу та критичного мислення. Створення проєктів учнями допомагає інтегрувати математику з природничими та гуманітарними дисциплінами, сприяючи глибшому розумінню її практичного застосування. Це стимулює креативність та міждисциплінарний підхід до навчання.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Вища математика : Диференціальне числення функцій однієї змінної : Практикум : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра / Н. Л. Денисенко, Т. О. Єрьоміна, В. В. Могильова. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 159 с.
2. Похідна та її застосування: навчальний посібник / В.М. Кузнецов, Т.М. Бусарова, Т.А. Агошкова, І.В. Клименко, Н.В. Міхєєва; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро, 2017. 104 с.
3. Чорний В.З., Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Прикладні аспекти диференціального числення: Навчальний посібник. Тернопіль: "Тайп", 2016. 72 с.