

МЕТОД КЛЮЧОВОЇ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ

THE KEY TASK METHOD AS A TOOL FOR FOSTERING STUDENTS' MATHEMATICAL COMPETENCIES

У статті висвітлено метод ключової задачі як ефективний засіб формування загальних математичних компетентностей учнів основної школи у процесі вивчення планіметрії. Зазначено, що компетентнісний підхід вимагає переорієнтації з репродуктивного на продуктивний стиль мислення учнів, що передбачає розвиток умінь самостійно аналізувати умову задачі, виконувати до неї точний і доцільний рисунок, встановлювати логічні зв'язки між відомими та шуканими величинами, а також здійснювати пошук розв'язку навіть у ситуації, коли спосіб його знаходження не є очевидним.

Проаналізовано результати зовнішнього незалежного оцінювання та національного мультипредметного тесту з математики останніх років, які виявили невисокий рівень сформованості в учнів навичок самостійного розв'язування планіметричних задач, зокрема – нестандартних. Це зумовлює потребу у впровадженні ефективних методик, орієнтованих на розвиток аналітичного, логічного та евристичного мислення школярів.

Описано основні етапи впровадження методу ключової задачі в курсі планіметрії, зокрема добір і класифікацію задач, побудову навчальних блоків на основі взаємозв'язків між задачами та розвиток умінь учнів самостійно знаходити розв'язання за аналогією до ключового прикладу. Наведено приклади ключових задач та похідних задач, що безпосередньо базуються на розв'язках попередніх, демонструючи ефективність такого підходу у формуванні предметних і міжпредметних компетентностей.

Також здійснена спроба проведення факультативного курсу планіметрії для учнів 10 класів, побудованого на засадах методу ключової задачі. Представлено результати впровадження цієї методики студентами IV курсу спеціальності «Середня освіта (Математика)» Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка під час проведення факультативних занять у школах м. Тернополя.

Сформульовано висновки щодо ефективності методу ключової задачі як інструмента активізації пізнавальної діяльності учнів, формування в них навичок самостійного навчання, розвитку евристичного досвіду та реалізації ідей компетентнісного підходу в математичній освіті.

Ключові слова: компетентнісний підхід, метод ключової задачі, планіметрія, факультативний курс «Метод ключової задачі в планіметрії».

тативний курс «Метод ключової задачі в планіметрії».

The article explores the key task method as an effective tool for developing general mathematical competencies in middle school students during their study of planimetry. The text notes that a competency-based approach necessitates a shift from a reproductive to a productive style of thinking. This involves nurturing students' ability to independently analyze problem statements, create accurate and appropriate diagrams, establish logical connections between known and unknown variables, and seek solutions even when the path forward is not immediately obvious.

An analysis of recent external independent testing and national multi-subject test results in mathematics revealed that students have a low level of proficiency in independently solving planimetric problems, particularly non-standard ones. This underscores the need for implementing effective methodologies focused on cultivating students' analytical, logical, and heuristic thinking.

The article outlines the main stages of integrating the key task method into the planimetry curriculum. These include selecting and classifying problems, structuring educational modules based on the interconnections between tasks, and helping students develop the skill of finding solutions by analogy with a key example. The text provides examples of key tasks and derived problems that build directly upon the solutions of preceding ones, thereby demonstrating the effectiveness of this approach in forming both subject-specific and cross-curricular competencies.

Furthermore, an attempt was made to implement an elective planimetry course for 10th-grade students based on the principles of the key task method. The article presents the results of this methodology's implementation by fourth-year students majoring in "Secondary Education (Mathematics)" at Ternopil Volodymyr Hnatiuk National Pedagogical University. They conducted the elective classes in schools in Ternopil. In conclusion, the article posits that the key task method is an effective instrument for stimulating students' cognitive activity, fostering independent learning skills, developing heuristic experience, and realizing the principles of a competency-based approach in mathematics education.

Key words: competence approach, key problem method, planimetry, optional course "Key problem method in planimetry".

УДК 37.016:51

DOI <https://doi.org/10.32782/ip/86.1.8>

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0

Гоменюк Г.В.,

канд. пед. наук,
доцент кафедри математики
та методики її навчання
Тернопільського національного
педагогічного університету
імені Володимира Гнатюка

Бойко А.Р.,

канд. тех. наук,
доцент кафедри математики
та методики її навчання
Тернопільського національного
педагогічного університету
імені Володимира Гнатюка

Постановка проблеми. Курс планіметрії є важливою частиною навчання, розвитку й виховання учнів 7–9 класів. В системі неперервної освіти цей курс ґрунтується на змісті математичної освітньої галузі Державного стандарту базової середньої освіти. Навчання планіметрії, як і загалом математики, забезпечує «формування й розвиток в учнів математичної компетентності у взаємозв'язку

з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає: засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі; розвиток логічного мислення та психічних властивостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті» [3].

Процес засвоєння знань з планіметрії відбувається в ході опанування змісту навчання, який реалізовано в шкільних підручниках з планіметрії, і який складається з теоретичної частини та системи геометричних задач. Задачі розглядаються в методиці навчання математики як найважливіший засіб засвоєння математичних понять та їхніх властивостей. Вони сприяють розвитку логічного мислення та творчої активності учнів, формують вміння застосовувати теоретичні знання на практиці. Саме тому формування в учнів загальноосвітньої школи вмінь розв'язувати геометричні задачі є однією з найбільш актуальних проблем наукових досліджень в педагогіці, психології та методиці навчання математики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Аналіз навчально-пізнавальної діяльності учнів у процесі розв'язування геометричних задач, визначення їхнього методичного функціоналу розкрито в працях О. М. Астряба, Г. П. Бевза, В. Г. Бевз, М. І. Бурди, Я. Й. Грудьонова, Д. Пойя, З. І. Слєпкань, Н. А. Тарасенкової, В. О. Швеця та інших математиків і методистів.

Психологічні аспекти математичної діяльності школярів у процесі навчання геометрії відображено в працях Г. О. Балла, Г. С. Костюка та інших психологів.

У контексті окресленої теми даної статті важливими є праці вчених, які досліджували питання побудови систем геометричних задач та дидактико-методичних вимог до них, зокрема, Г. В. Аполтової, Я. Й. Грудьонова, В. А. Жарова, В. Г. Бевз, Н. А. Сяською, М. С. Якіра та ін.

Результати всіх цих численних наукових досліджень знайшли своє відображення в сучасних концепціях реформування шкільної математичної освіти, навчальних програмах, підручниках та навчально-методичних посібниках з геометрії.

Однак, як свідчать результати тестів з математики ЗНО та НМТ [5] вміння самостійно розв'язувати задачі в переважній більшості учнів не сформовано на достатньому рівні. Це особливо стосується задач з планіметрії, які викликають найбільше труднощів. Причини такого становища різні, але на нашу думку, основна причина полягає в традиційній практиці навчання розв'язуванню задач «за зразком», особливо, коли пошук розв'язку обмежено рамками конкретного параграфа підручника. Крім того, відомо, що розв'язок більшості задач з планіметрії не досягається за допомогою точних алгоритмів, як наприклад в алгебрі, майже кожна геометрична задача вимагає свого власного підходу. При цьому важливо, щоб кожна задача, яку розв'язують учні на уроках геометрії, виступала не лише в якості ілюстрації теорії, а розглядалась як об'єкт пошукової та евристичної діяльності учнів. Відповідно вчитель, який пропонує учням розв'язати певну задачу, переслідує,

як правило, більш загальну мету, ніж одержати правильну відповідь. Для нього ця задача є лише однією з багатьох, які необхідні для формування або закріплення нового поняття, отримання нових або актуалізацію раніше здобутих знань, демонстрацію певного методу міркувань, використання способів доведень, активізацію вміння виконувати допоміжні побудови тощо.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. У зв'язку з цим виникає проблема створення систем взаємопов'язаних задач, різних за формулюванням та прийомами розв'язування, які при цьому мають спільне дидактичне призначення і служать досягненню поставленої мети. У той же час побудова такого циклу задач, в методичному розумінні повного щодо поставленої мети, є надзвичайно складною і цікавою проблемою, яка в шкільній практиці найчастіше розв'язується на інтуїтивному рівні та суттєво залежить від досвіду вчителя, його математичної ерудиції та методичної майстерності. Тому вивчення і систематизація різноманітних методів і прийомів побудови таких систем задач, особливо з геометрії, є актуальною проблемою, як в теоретичному, так і практичному аспектах. Одним із таких способів є метод ключової задачі

Мета статті. Теоретичне обґрунтування та експериментальна перевірка ефективності методу ключової задачі як засобу формування загальних математичних компетентностей учнів основної школи в процесі вивчення планіметрії.

Виклад основного матеріалу. Для того, щоб зрозуміти, як працює метод ключової задачі в планіметрії, розглянемо приклади таких задач, розв'язання яких залежать від попередньо розв'язаної ключової задачі. У запропонованих прикладах назва кожної ключової задачі відповідає тій геометричній ситуації, яка в ній розглядається.

Ключова задача 1: «Паралельні прямі, що перетинають сторони кута».

Якщо $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (рис. 1), то

- 1) $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$;
- 2) $\frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}$.

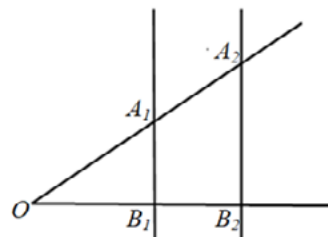


Рис. 1. Ключова задача 1

Розв'язання:

Оскільки $\triangle OA_1B_1$ і $\triangle OA_2B_2$ подібні за першою ознакою подібності, то відповідні сторони цих трикутників пропорційні.

$$\text{Звідки слідує: } \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}.$$

Перетворимо рівність $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2}$ наступним чином:

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1};$$

$$\frac{OA_2}{OA_1} - 1 = \frac{OB_2}{OB_1} - 1;$$

$$\frac{OA_2 - OA_1}{OA_1} = \frac{OB_2 - OB_1}{OB_1};$$

$$\frac{A_2A_1}{OA_1} = \frac{B_2B_1}{OB_1};$$

$$\frac{OA_1}{A_2A_1} = \frac{OB_1}{B_2B_1}.$$

Доведено.

Розглянемо задачі, які розв'язуються на основі доведеної ключової задачі.

Задача 1. Дано три відрізки a , b , c . Побудуйте такий відрізок x , щоб виконувалась умова: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Розв'язання:

На сторонах довільного кута (рис. 2) відкладемо відрізки $OA_1 = a$, $A_1A_2 = b$, $OB_1 = c$.

З'єднаємо точки A_1 та B_1 , та проведемо $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ (паралельно).

За ключовою задачею 1 маємо:

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}; \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{x}.$$

$$\text{Отже, } x = B_1B_2 = \frac{bc}{a}.$$

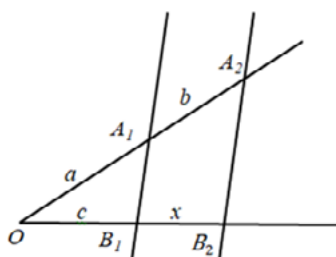


Рис. 2. Задача 1

Задача 2. У рівнобедреному $\triangle ABC$ ($AC = BC$) проведено медіану CC_1 і бісектрису AA_1 . Знайти кут $\angle ABC$, якщо $AA_1 = CC_1$.

Розв'язання:

Проведемо $C_1D \parallel AA_1$ (паралельно).

Оскільки $AC_1 = BC_1$ (рис. 3), і пряма C_1D паралельна AA_1 , то C_1D є середньою лінією $\triangle AA_1B$, тоді $C_1D = \frac{1}{2} AA_1 = CC_1$, оскільки за умовою задачі $AA_1 = 2CC_1$.

Звідси випливає, що $\triangle CC_1D$ – рівнобедрений. Нехай $\angle ACC_1 = \angle BCC_1 = \angle CDC_1 = \alpha$. Тоді

з прямокутного трикутника $\triangle ACC_1$ слідує, що $\angle CAC_1 = \angle CBC_1 = 90^\circ - \alpha$, а кути $\angle C_1AA_1 = \angle DC_1B = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

За властивістю зовнішнього кута трикутника в трикутнику $\triangle BDC_1$ $\angle CDC_1 = \angle DC_1B + \angle DBC_1$ або $\alpha = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \alpha$, звідси $2\alpha = 108^\circ$.

Отже, $\angle ACB = 108^\circ$.

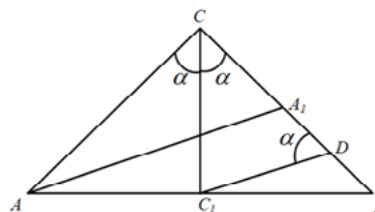


Рис. 3. Задача 2

Задача 3. Висота BK ромба $ABCD$, проведена до сторони AD , перетинає діагональ ABC в точці M . Знайти MD , якщо $BK = 4$.

Розв'язання:

Проведемо $OL \perp AD$. Маємо $BO = OD$, $BK \parallel OL$ (рис. 4), отже за ключовою задачею 1 маємо:

$$\frac{DL}{LK} = \frac{DO}{BO} = 1.$$

Тому $DL = LK$.

Враховуючи, що $AK : KD = 1 : 2$, одержуємо $AK = KL$.

Оскільки $KM \parallel OL$, то KM – середня лінія $\triangle AOL$.

Таким чином, $KM = \frac{1}{2} OL$, $OL = \frac{1}{2} BK \Rightarrow MK = \frac{1}{4} BK$.

Отже, $MK = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$. Тоді $MK = BM$, $BM = BK - MK \Rightarrow MK = 4 - 1 = 3$.

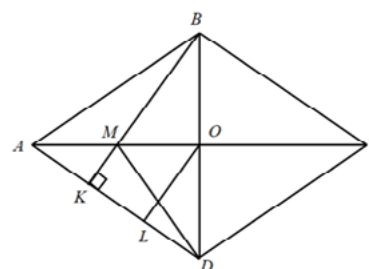


Рис. 4. Задача 3

Наведемо приклад ще однієї ключової задачі.

Ключова задача 2: «Медіана проведена до гіпотенузи»: у прямокутному трикутнику довжина медіани, яка виходить з вершини прямого кута, дорівнює половині довжини гіпотенузи.

Розв'язання:

В $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$), BM – медіана.

На промені BM відкладемо відрізок MD , рівний відрітку BM (рис. 5). Утворюється чотирикутник $ABCD$, який є прямокутником. Діагоналі прямокутника є рівними та точкою перетину діляться навпіл, отже $AM = CM = \frac{1}{2} AC$.

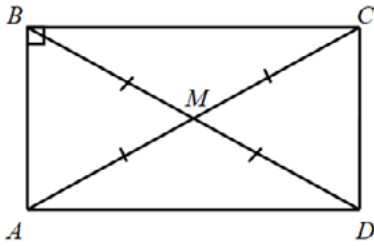


Рис. 5. Ключова задача 2

Наслідок: центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника є серединою гіпотенузи і $R = \frac{c}{2}$.

Розглянемо задачі, які розв'язуються на основі доведеної ключової задачі 2.

Задача 4. Медіана, проведена до гіпотенузи, ділить прямий кут у відношенні 1:2. Довжина медіани дорівнює m . Знайти сторони трикутника (рис. 6).

Розв'язання:

З відомого відношення величин кутів одержуємо, що $\angle CBM = 30^\circ$, $\angle ABM = 60^\circ$.

Оскільки $BM = \frac{1}{2}AC = AM$, то $\triangle ABM$ є рівностороннім, тому $AB = BM = m$.

$AC = 2m$. За теоремою Піфагора маємо:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} \Rightarrow BC = \sqrt{(2m)^2 - m^2} = \sqrt{3m^2} = m\sqrt{3}.$$

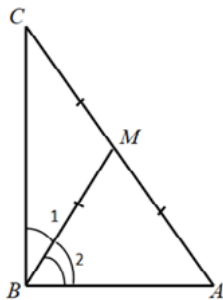


Рис. 6. Задача 4

Задача 5. Знайти основи AB і CD трапеції $ABCD$, в якій $AB = 2CD = AD$

Розв'язання:

Позначимо $AC = a$, $BC = b$.

Проведемо $CE \parallel AD$. Тоді $AECD$ є паралелограмом (рис. 7), звідки випливає, що $AE = CD = \frac{1}{2}AB$. Тому E – середина AB , отже в $\triangle ACB$ медіана CE дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, звідси за ключовою задачею 2 маємо, що $\angle ACB = 90^\circ$.

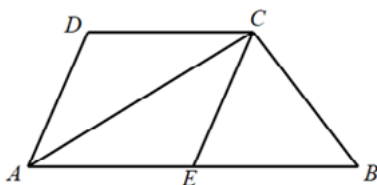


Рис. 7. Задача 5

За теоремою Піфагора отримуємо:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}, \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ідея використання ключової (опорної, базової) задачі з'явилась в методиці навчання геометрії на основі досліджень психологів і досвіду вчителів, які свідчать, що при розв'язуванні складної задачі учні починають пригадувати, до якого уже з відомих типів задач її можна віднести. При цьому вони, аналізуючи умову задачі та здійснюючи пошукові спроби, намагаються використати саме ту інформацію, закладену в умову задачі, яка б дозволила перенести досвід використання вже відомого їм загального методу або часткового прийому, отриманих раніше, на ту задачу, яку необхідно розв'язати. Іншими словами, досвід попереднього розв'язання задачі суттєво впливає на самостійне розв'язання інших задач, якщо вони об'єднані спільною геометричною ситуацією.

З огляду на це ключові задачі є своєрідними вказівками та опорою для самостійної діяльності учнів у процесі розв'язування наступних задач. Вони відрізняються від прямих вказівок вчителя, як розв'язати таку задачу чи, тим більше, від готових розв'язків.

Авторами статті було випробувано, як працює метод ключової задачі під час педагогічної практики студентів IV курсу спеціальності «Середня освіта (Математика)», які проводили факультативні заняття з учнями 10-х класів шкіл міста Тернополя. Аналіз результатів вхідної діагностики учнів засвідчив, що на першому факультативному занятті з планіметрії жодний з них не зміг самостійно розв'язати задачі 1, 5 з наведених у даній статті прикладів. Проміжний контроль після опрацювання двох перших ключових задач, які містяться в створеному авторами статті факультативному курсі «Метод ключової задачі в планіметрії» показав, що 29% учнів змогли самостійно розв'язати всі запропоновані завдання. Результати підсумкової контрольної роботи підтвердили, що вже 67% учнів, які відвідували факультатив, досягли достатнього і високого рівня знань.

Методика використання ключової задачі є наступною: необхідно спочатку розв'язати ключову задачу, потім декілька задач, в яких або повторюється геометрична ситуація ключової задачі тільки під іншим кутом сприйняття, або ключова задача є складовою частиною даної задачі, або розв'язання даної задачі безпосередньо зводиться до ключової задачі. З кожною розв'язаною задачею учень швидше підходить до того моменту, коли власне використовується ключова задача, таким чином в учнів формується вміння самостійно застосовувати набуті знання (ключову задачу) до розв'язування нових і досить складних завдань [2].

Основним етапом використання методу ключових задач є самостійна робота учнів над циклом задач, який об'єднує декілька ключових задач. Такий цикл задач створює вчитель математики. Після того, як учні опрацюють запропоновані завдання, вчитель разом з ними аналізує отримані розв'язки, оцінює роботу учнів і переходить до наступних тем. Після того, як опрацьовано декілька ключових задач, об'єднаних в одну групу за певними критеріями (темою шкільного курсу планіметрії або загальним методом розв'язання), вчитель пропонує учням виконати контрольну роботу, яка містить завдання, що спираються на опрацьовані ключові задачі, а також ті, для розв'язання яких необхідно використати інші способи міркувань або теоретичні факти.

Такий підбір завдань необхідний для того, щоб учитель і учні переконалися чи готові вони використовувати набуті вміння не лише в ситуації, коли відомо, яку саме ключову задачу необхідно застосувати, а й тоді, коли немає на це прямої вказівки. Якщо учні успішно справляються з контрольною роботою, то можна вважати, що метод ключової задачі досягнув поставленої мети, а саме, формування в учнів загальних математичних компетентностей [6]: вміння аналізувати умову задачі; правильно виконувати рисунок до задачі; встановлювати логічні зв'язки між даними в умові задачі; наполегливо шукати розв'язок задачі, навіть за умови, коли спосіб її розв'язання не очевидний.

Висновки. Метод ключової задачі виступає результативним засобом формування загальних математичних компетентностей учнів у процесі вивчення планіметрії в основній школі. Його використання сприяє розвитку продуктивного мислення, що є важливою складовою реалізації компетентнісного підходу в сучасній освіті. Аналіз результатів зовнішнього незалежного оцінювання та національного мультипредметного тестування з математики демонструє низький рівень сформованості в учнів умінь самостійно розв'язувати геометричні задачі, зокрема нестандартні. Це обумовлює необхідність застосування ефективних дидактичних підходів, орієнтованих на розвиток логічного, аналітичного та евристичного мислення. Метод ключової задачі забезпечує системну роботу над формуванням навичок аналізу математичної

умови, побудови точних і змістовних графічних зображень, встановлення взаємозв'язків між елементами задачі та перенесення набутого досвіду на розв'язування подібних або змінених задач.

Перспективи подальших досліджень полягають у детальнішому аналізі впливу методу ключової задачі на розвиток математичних компетентностей учнів, зокрема в аспекті критичного мислення та побудови власних стратегій розв'язування. Актуальним є створення й випробування різних моделей використання цього методу у викладанні геометрії в умовах профільного навчання та інтегрованих курсів у контексті Нової української школи. Доцільним є також розроблення цифрових ресурсів на основі ключових задач і вивчення ефективності їх застосування в очному, змішаному та дистанційному навчанні. Перспективним напрямом є інтеграція цього методу в підготовку майбутніх учителів як засобу формування методичної майстерності та вміння проєктувати компетентісно орієнтоване навчання.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Астаф'єва М. М. Роль задач у формуванні математичної компетентності школярів. *Фізико-математична освіта*. 2018. Вип. 3. С. 20–25.
2. Вибрані методи розв'язування задач планіметрії. Задачі для самостійної роботи студентів з дисципліни «Методика навчання математики» / за заг. ред. проф. І. В. Лов'янової. Кривий Ріг : КДПУ, 2023. 76 с.
3. Державний стандарт базової середньої освіти. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti>
4. Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми* : зб. наук. пр. Випуск № 26. Київ–Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2010. 566 с.
5. Найд'юнов Л. Психологічний аналіз результатів ЗНО з математики. URL: <https://osvita.ua/blogs/82901/>
6. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : Монографія. Х. : Факт, 2005. 360с.
7. Сяська Н. А. Методична система реалізації функцій задач в навчанні планіметрії : автореф. дис... канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)». К., 2005. 20 с.

Дата першого надходження рукопису до видання: 25.08.2025

Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 25.09.2025

Дата публікації: 24.09.2025